Ecuaciones Diferenciales

¿Qué son? ¿Por qué usarlas? ¿Qué tan rápido se propaga una enfermedad? ¿Qué tan rápido cambia una población?

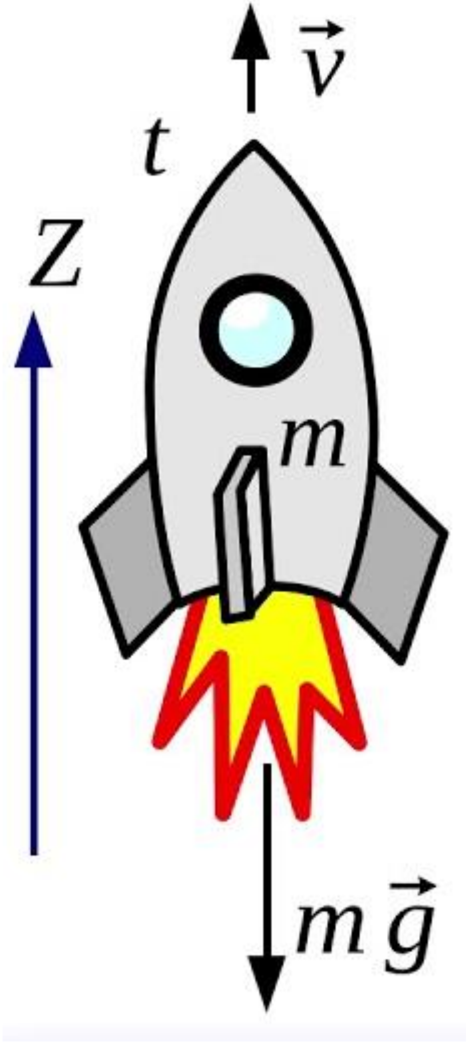
Ecuación Diferencial

Se denomina **ecuación diferencial (ED)** a la ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \qquad\qquad y'' + y' + x = \cos x$$

Un ejemplo de las ecuaciones diferenciales consiste en las ecuaciones clásicas de movimiento, que provienen de la segunda ley de movimiento de Newtonw

$$F = m \cdot a \qquad\qquad F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$



Ecuación Diferencial

Tengamos presente las siguientes idea y hechos

- La Solución de una ecuación diferencial es una **función** cuya derivada o derivadas satisfacen la ecuación diferencial

- Una ecuación de movimiento es una ecuación diferencial obtenida a partir de la segunda ley de Newton. F = ma

- En principio una ecuación diferencial se puede resolver para dar la posición y velocidad en función del tiempo que cada partícula en un sistema gobernado por las leyes del movimiento

Ecuación Diferencial

Tengamos presente las siguientes idea y hechos

- Una ecuación diferencial **lineal homogénea con coeficientes constantes** se puede resolver mediante el uso de una **solución de prueba exponencial**

- Una ecuación diferencial **lineal no homogénea** se puede resolver si se puede encontrar una **solución particular**

- Una ecuación diferencial **exacta**, se puede resolver mediante **integración directa.**

Ecuación Diferencial

Tengamos presente las siguientes idea y hechos

- Algunas ecuaciones diferenciales inexactas se pueden convertir en ecuaciones diferenciales exactas por la multiplicación de un factor integrante.

- Algunas ecuaciones diferenciales **parciales** se pueden resolver por **separación de variables**

- Las ecuaciones diferenciales se pueden resolver numéricamente mediante una variedad de métodos.

Ecuación Diferencial

Entonces…

Una **ecuación diferencial** en *x* y *y* es una ecuación que incluye *x, y* y derivadas de *y.*

De esta forma

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial, si la ecuación se **satisface** cuando *y* y sus derivadas se reemplazan por *f(x)* y sus derivadas.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad\qquad y = Ce^{-2x} \textbf{\textit{ (solución general)}}$$

Donde *C* es cualquier número real.

Ecuación Diferencial

Verificando la solución tendremos que:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$y = Ce^{-2x}$ ***(solución general)***

Derivando la solución general

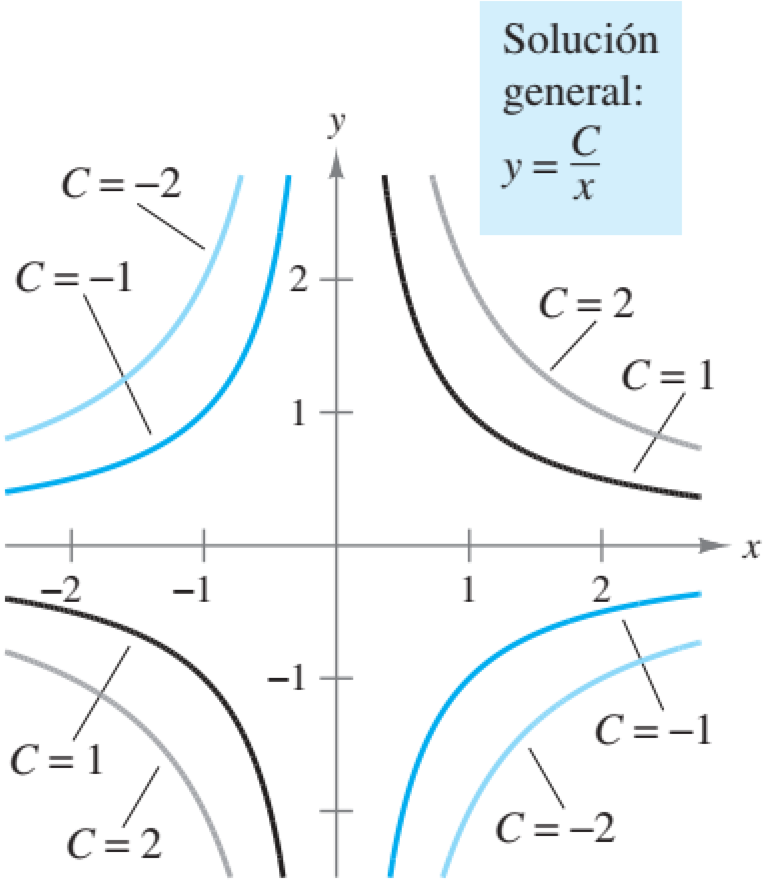
$$dy = Ce^{-2x}(-2x)'$$
$$dy = -2Ce^{-2x}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -2Ce^{-2x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$-2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 0$$

Ecuación Diferencial



Curvas solución para $xy' + y = 0$

Algunas ecuaciones diferenciales tienen **soluciones singulares** que no se pueden escribir como casos especiales de la solución general.

Geométricamente hablando, la solución general de una ecuación diferencial de primer orden representa una familia de curvas como **curvas solución,** una para cada valor asignado a la constante arbitraria.

$$xy' + y = 0$$ **Ecuación diferencial**

$$y = \frac{C}{x}$$ **Solución general**

Ecuación Diferencial

Las **soluciones particulares** de la ecuación diferencial se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valores de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente.

La **condición inicial** se deriva del hecho de que, con frecuencia en problemas que involucran "tiempo", el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas es conocida en el tiempo *inicial*. Ejemplo:

$$s''(t) = -32$$ **Ecuación diferencial**

$$s(t) = -16t^2 + C_1 t + C_2$$ **Solución general**

$$s(0) = 80, \qquad s'(0) = 64$$ **Condiciones Iniciales**

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$$ **Solución particular**

Ecuación Diferencial

Ejemplo: Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$ verificar que $y = Cx^3$es una solución y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$

Solución *Se sabe que* $y = Cx^3$es una solución dado a que $y' = 3Cx^2$

Entonces de esta forma $xy' - 3y = x(3Cx^2) - 3Cx^3 = 0$

Ahora, tomando las condiciones iniciales $y = 2; x = -3$ *Se tiene que:*

$y = Cx^3$ Solución General

$2 = C(-3)^3$ Sustituyendo la condición inicial

$-\frac{2}{27} = C$ $\Leftarrow$ Solución para C

$\Rightarrow$ $y = -\frac{2x^3}{27}$ Solución particular

Ecuación Diferencial

Ejemplo: Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$ verificar que $y = Cx^3$es una solución y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$

Solución

$$y = -\frac{2x^3}{27}$$ Solución particular

Ahora, como ejercicio verifiquemos esta solución al sustituir y y y' en la ecuación original.

NOTA: <u>Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder con el número de constantes en la solución general.</u>

Ecuación Diferencial

Las ecuaciones diferenciales las podemos clasificar por **tipo**, **orden** y **linealidad**

Clasificación por tipo

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): *Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes de una sola variable independiente.*

Ecuación diferencial parcial (EDP): *Si una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables dependientes.*

Ecuación Diferencial

Clasificación por tipo

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): *Ejemplos*

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^{x} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5dy}{dx} + 6y = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 2x + y$$

Ecuación diferencial parcial (EDP): *Ejemplos*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{dt} \qquad \frac{\partial u}{dy} = -\frac{\partial v}{dx}$$

Ecuación Diferencial

Clasificación por orden

El orden de una ecuación diferencial ya sea una EDO o una EDP es el orden de la mayor derivada en la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Término de primer orden

Término de segundo orden

Ecuación de segundo orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

Ecuación de tercer orden

Término de primer orden

Término de segundo orden

Término de tercer orden

Ecuación Diferencial

Clasificación por linealidad

Lineal: Se dice que una ecuación diferencial de *n-ésimo* orden es lineal si *F* es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Esto significa que una EDO d *n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación anterior es*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Ecuación Diferencial

Clasificación por linealidad

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

En la combinación de la suma del lado izquierdo de la ecuación anterior, vemos que las dos propiedades características de una EDO son:

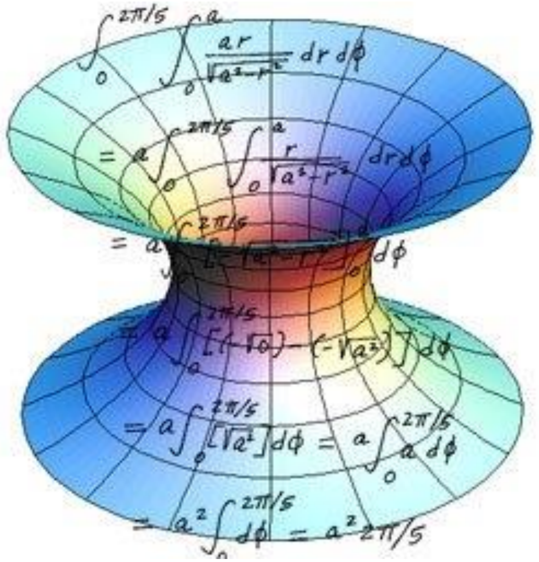
- La **variable dependiente** *y* y todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene *y* es igual al **uno**.
- Los coeficientes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ **depende** de la **variable independiente x**

Ecuación Diferencial

Clasificación por linealidad

No lineal: es simplemente una que no es lineal.

Las funciones no lineal de la variable dependiente o sus derivadas o sus derivadas tales como $sen\ y$ o e^y, **NO** pueden **aparecer** en una ecuación lineal



Ecuación Diferencial

Clasificación por linealidad

<u>Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Lineales</u>

$$(y-x)dx+4xdy=0 \qquad y''-2y'+y=0 \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-5=e^x$$

Las ecuaciones anteriores son, ecuaciones diferenciales *lineales* de primer, segundo y tercer orden respectivamente.

$$(y-x)dx+4xdy=0$$

Es lineal en la variable y cuando se escribe de la siguiente forma:

$$4xy'+y=x$$

Ecuación Diferencial

Clasificación por linealidad

Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

$$(1-y)y' + 2y = e^x$$ Término no lineal: coeficiente dependiente de y

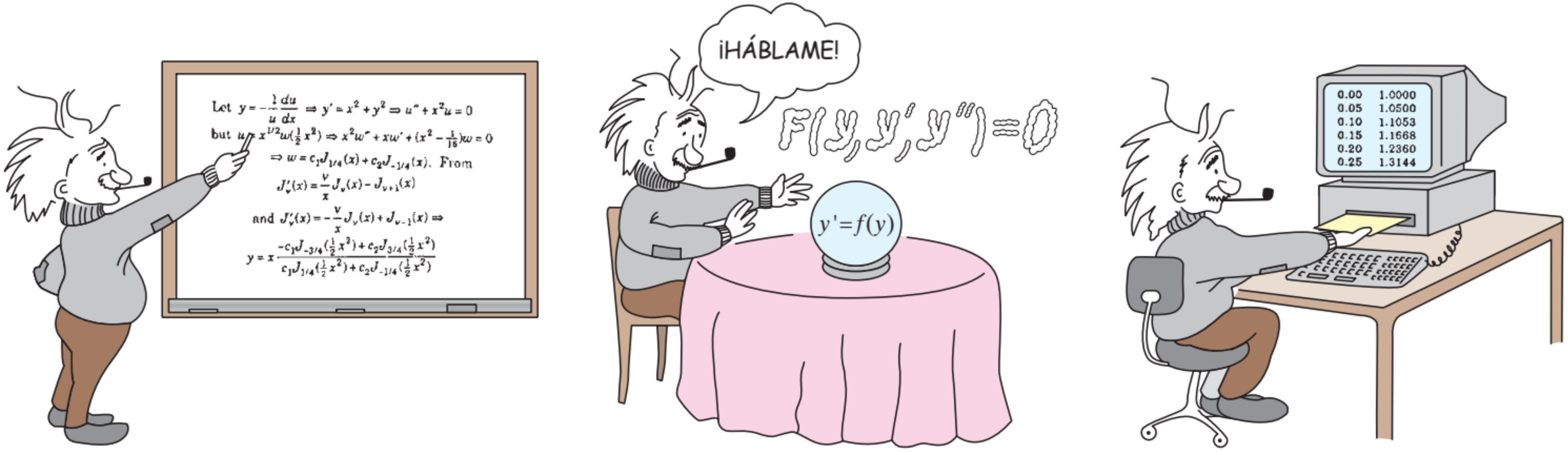
$$\frac{d^2y}{dx^2} + seny = 0$$ Término no lineal: función no lineal de y

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$ Término no lineal: el exponente es diferente de 1

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden, respectivamente.

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales



a) analítico **b)** cualitativo **c)** numérico

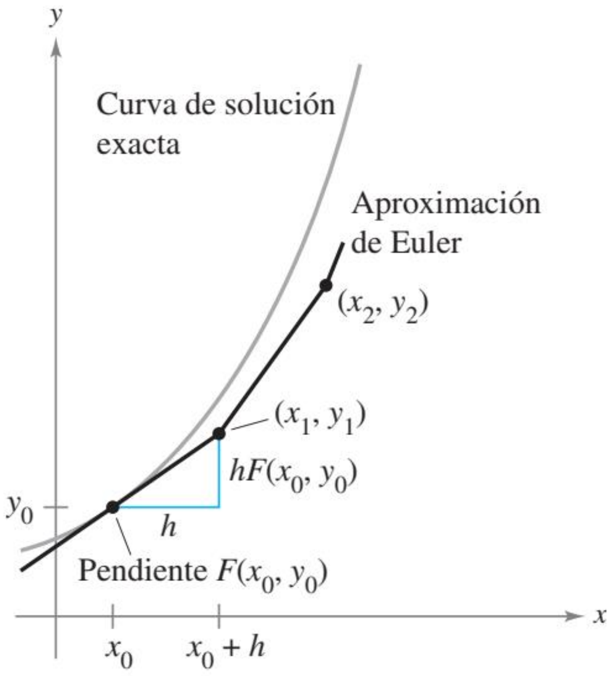
Métodos para el estudio de las ecuaciones diferenciales

Ecuación Diferencial

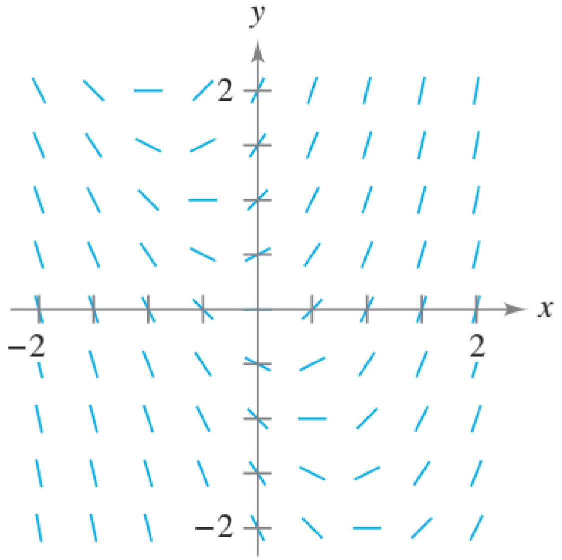
Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Resolver una ecuación diferencial de forma analítica puede ser muy difícil o casi imposible. Sin embargo, existen aproximaciones gráficas y aproximaciones numéricas.

De forma gráfica tenemos el método de **campos de pendientes** y de forma numérica el **método de Euler**.



método de Euler.



campos de pendientes

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

Con una aproximación gráfica se puede usar para aprender mucho para aprender acerca de la solución de una ecuación diferencial.

Consideremos una ecuación diferencial de la forma $y' = F(x,y)$ donde $F(x,y)$ es una expresión en x y y. En cada punto de (x,y) en el plano xy donde F está definida la ecuación diferencial determina la pendiente $y'=F(x,y)$ de la solución en ese punto.

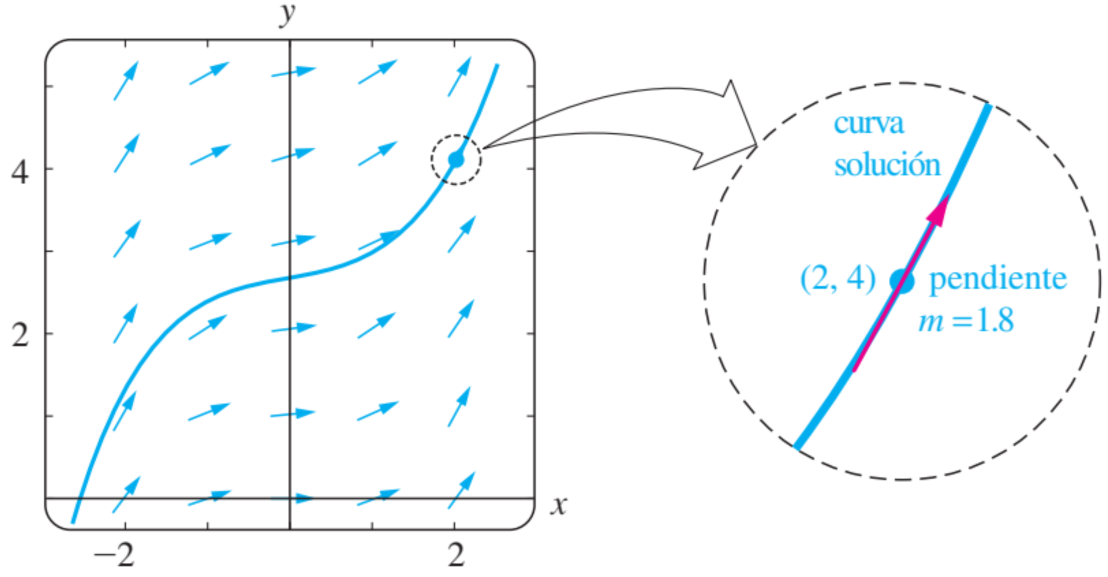
Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

Entonces, si dibujamos una recta corta con pendiente *F(x,y)* en los puntos seleccionados de *(x,y)* en el dominio de *F*; estos segmentos formaran un **campo de pendientes** o un **campo de direcciones** para la ecuación diferencial *y' = F(x,y)*. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva de solución en a través de ese punto.

Una derivada dy/dx de una función derivable y = y(x) da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica



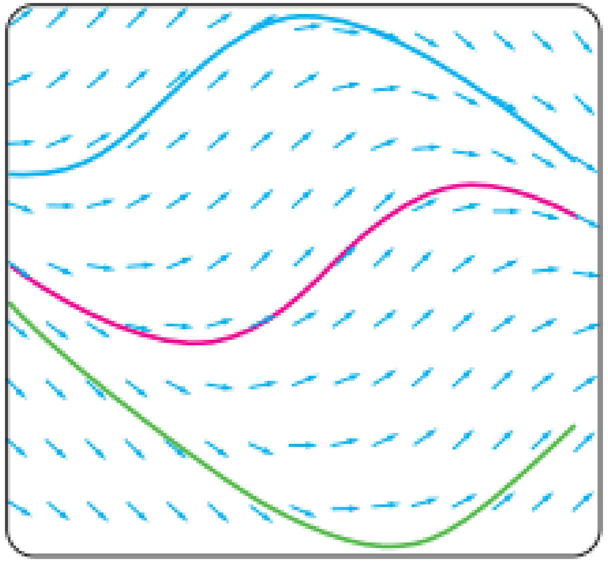
Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

Entonces, si dibujamos una recta corta con pendiente $F(x,y)$ en los puntos seleccionados de (x,y) en el dominio de F; estos segmentos formaran un **campo de pendientes** o un **campo de direcciones** para la ecuación diferencial $y' = F(x,y)$. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva de solución en a través de ese punto.

Un campo de pendientes muestra la forma general de todas las soluciones y muestra una perspectiva visual de las soluciones a una ecuación diferencial



Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

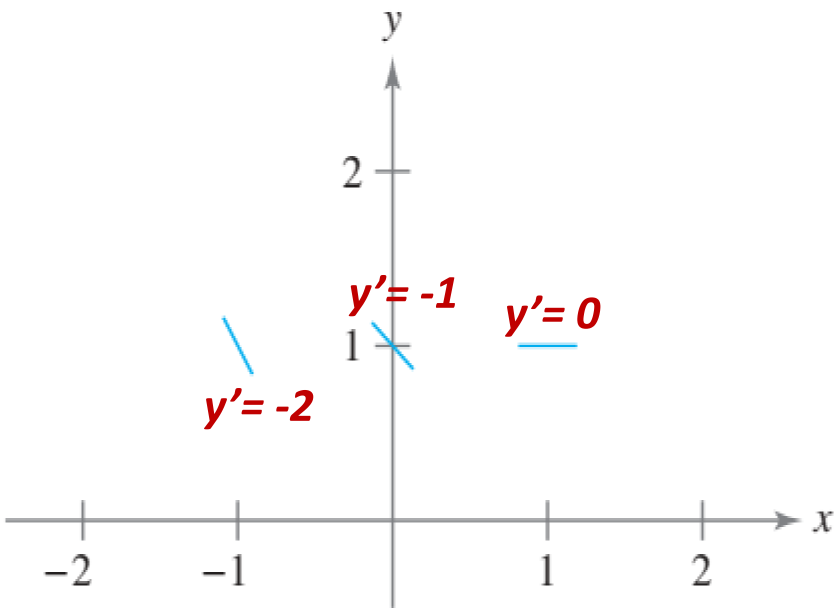
Ejemplo: Representar un campo de pendientes de la ecuación diferencial $y'=x-y$ para los puntos (-1,1), (0,1) y (1,1)

Solución

La pendiente de la curva solución en cualquier punto (x,y) es $F(x,y)=x-y$

Entonces…

1. *.**Sustituimos** los valores de (x,y) dados en la ecuación $y'=x-y$* *valores de y': (-2) (-1) (0)*
2. *Con los valores obtenidos **dibujamos** segmentos cortos en los puntos dados*



Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

Ejemplo: Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 2x + y$

Solución

1. *Realizaremos una tabla que muestre las pendientes en varios puntos (es necesario calcular las pendientes en muchos puntos para tener un campo representativo)*

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	- 1	1	- 1	1	- 1	1	- 1	1	-1	1
$y'=2x+y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

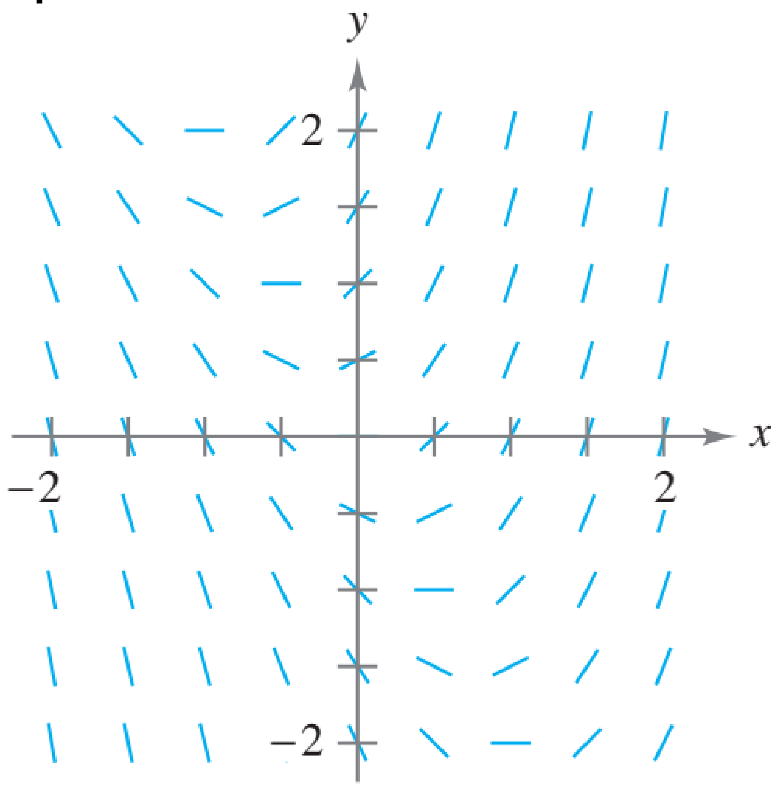
Campos de Pendiente

Ejemplo: Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial *y' = 2x + y*

Solución

2. Dibujaremos los segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas pendientes.

Nota: *Dibujar un campo de pendientes a mano puede resultar muy tedioso. En la práctica se suelen dibujar mediante un método gráfico*



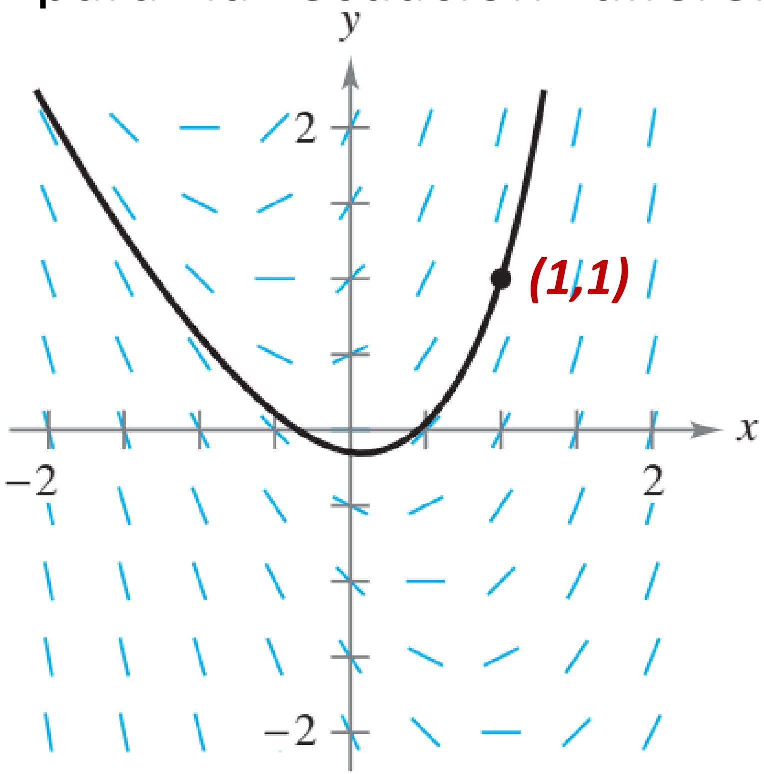
Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Campos de Pendiente

Ejemplo: Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial $y' = 2x + y$

Solución



3. Si queremos dibujar hallar una **solución particular**, se debe dibujar la curva solución tal que ésta se mueva paralela al segmento más cercano.

4. Si tomamos el punto (1,1) se debe hacer lo mismo para la izquierda del punto.

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

Es un método numérico para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial *y' = F(x,y)* que pasa a través del punto (x_0, y_0) y tiene pendiente de $F(x_0, y_0)$ en ese punto. Esto da un **"punto inicial"** para aproximar la solución.

A partir del punto inicial, se sigue en la dirección indicada por la pendiente. Mediante un pequeño paso *h,* se nueve a lo largo de la recta tangente hasta llegar al punto (x_1, y_1)

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{y} \quad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

$$x_1 = x_0 + h \qquad y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h \qquad y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

$$x_3 = x_2 + h \qquad y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2)$$

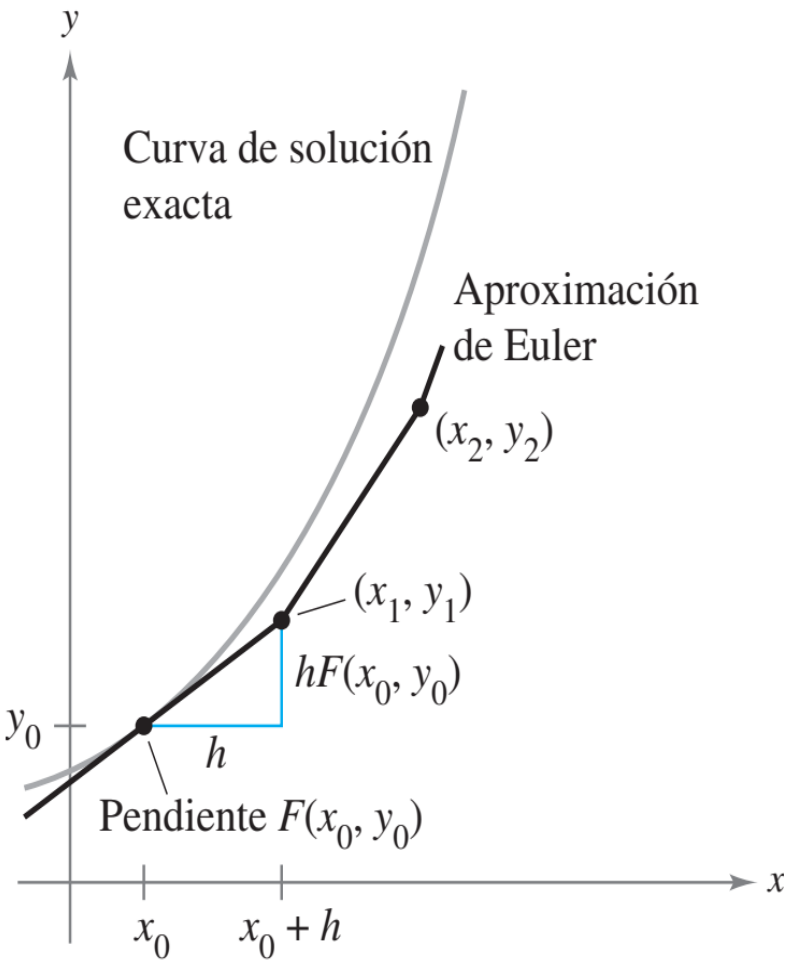
.

.

.

$$x_n = x_{n-1} + h \qquad y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Nota: *se pueden obtener mejores aproximaciones de la solución si se escogen tamaños de paso cada vez más pequeños*

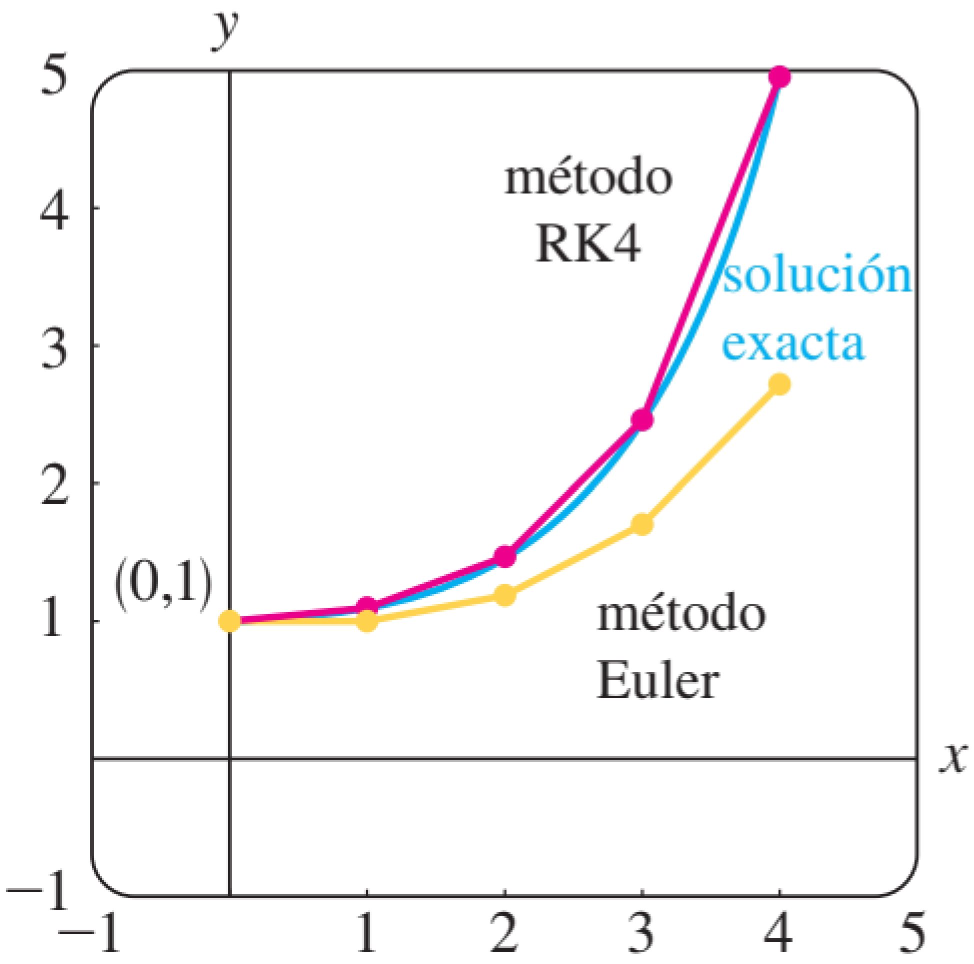


Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

Advertencia: El método de Euler sólo es uno de los diferentes métodos en los que se puede aproximar una solución de una ecuación diferencial. Aunque por su sencillez es atractivo, esté *método rara vez se usa en los cálculos serios*. Hay métodos que tienen más precisión como el método de **Runge-Kutta (método RK4)**



Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

Ejemplo: Usar el método de Euler para aproximar la solución particular de la ecuación diferencial *y' = x – y* que pasa a través del punto (0,1) usar un paso de *h* = 0.1

Solución: Mediante $h = 0.1, x_o = 0, y_0 = 1$ y $F(x, y) = x - y$

Entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0 && y_0 = 1 \\
&x_1 = x_0 + h = 0.1 && y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 0.9 \\
&x_2 = x_1 + h = 0.2 && y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 0.82 \\
&\ldots && \ldots \\
&x_{10} = x_9 + h = 1.0 && y_{10} = y_9 + hF(x_9, y_9) = 0.697
\end{aligned}
$$

Ecuación Diferencial

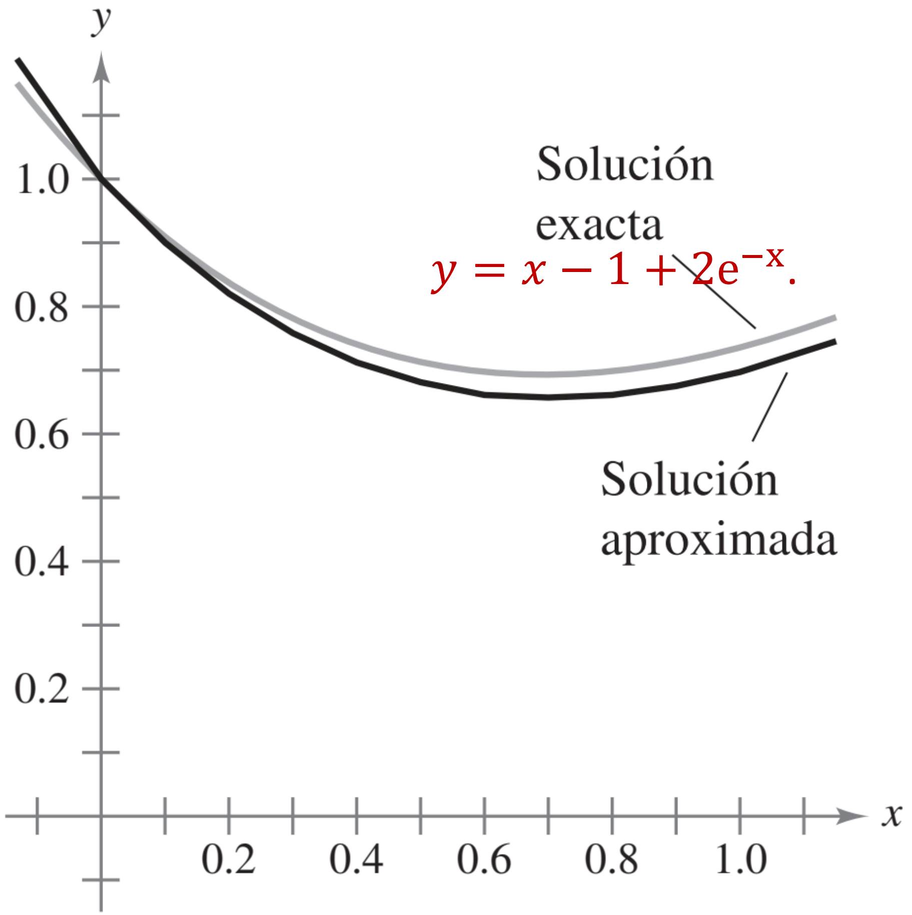
Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

Solución: Colocaremos todos los datos en una tabla y luego graficaremos la solución.

n	0	1	2	3	4
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_n	1	0.900	0.820	0.758	0.712

5	6	7	8	9	10
0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.681	0.663	0.657	0.661	0.675	0.697



Nota: Se puede verificar que la solución exacta de la ED es $y = x - 1 + 2e^{-x}$.

Ecuación Diferencial

Resolviendo las ecuaciones diferenciales

Método de Euler

Reto: En el tiempo *t=0* minutos, la temperatura de un objeto es 140 °F. La temperatura del objeto cambia a un ritmo o velocidad dado por la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2}(T - 72)$$

a) Usar una herramienta de graficación y el método de Euler para aproximar las soluciones de esta ecuación diferencial en *t = 1, 2 y 3.* Usar un paso de *h*=0.1 y un paso *h = 0.05*

b) Compara los resultados con la solución exactas

$$T = 72 + 68e^{-t/2}$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Con frecuencia se desea describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas de la vida real, ya sean fenómenos **físicos**, **sociológicos** o incluso **económicos**.

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

A esta descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo:

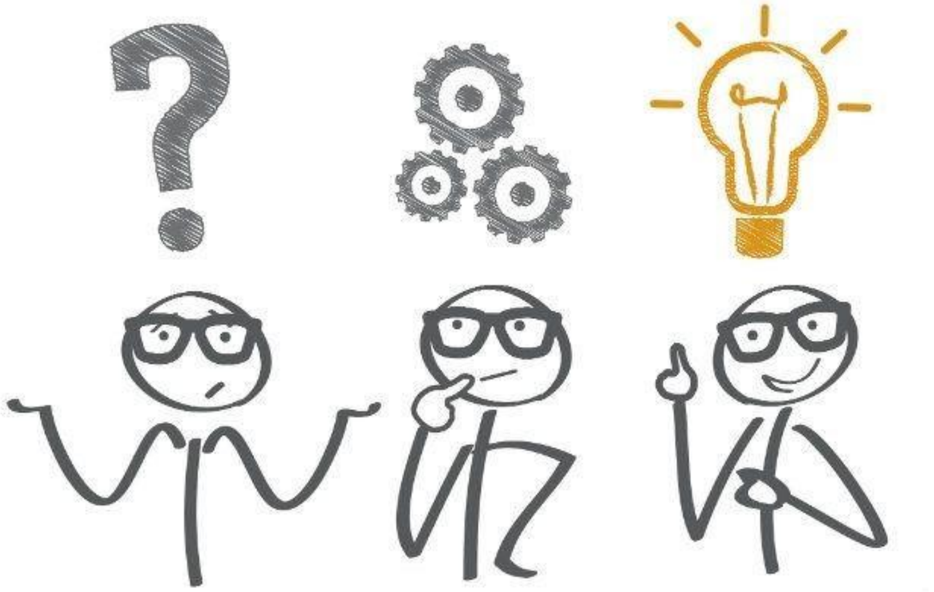
- **entender** los mecanismos de cierto ecosistema.
- Estudiar el **crecimiento** de cierta población animal.
- Datar fósiles
- Estudiar el **decaimiento** radiactivo

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

La formulación de un modelo matemático de un sistema inicia con:

1. La **identificación** de las variables que ocasionan el cambio del sistema (se puede elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo).

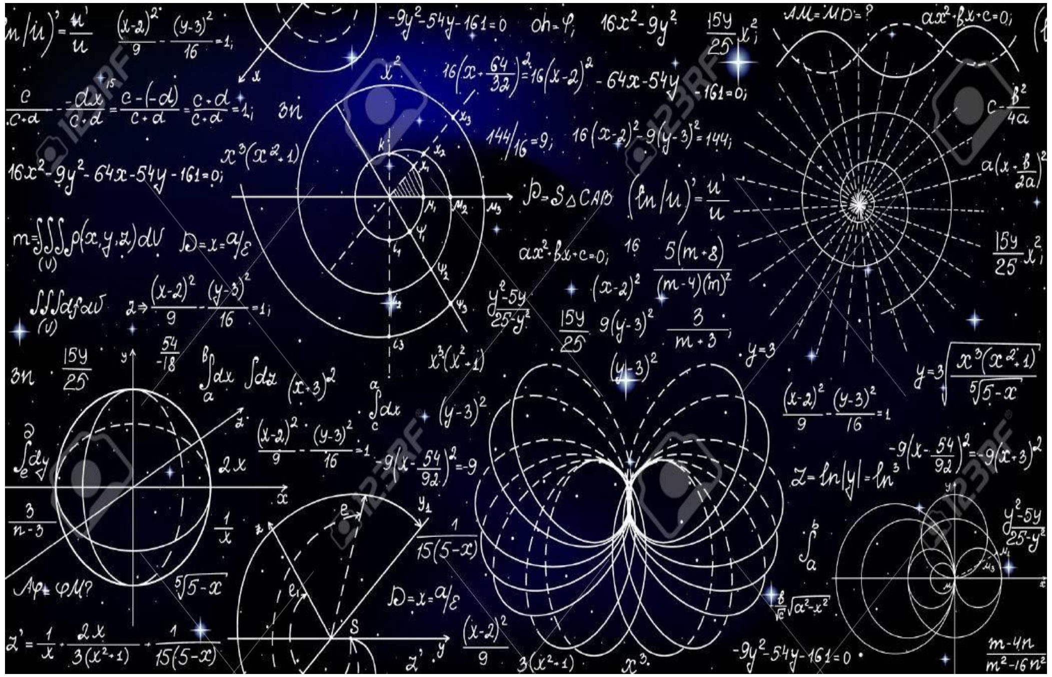


2. Se establece un conjunto de suposiciones o **hipótesis** del sistema que estamos tratando de describir (Se incluyen todas las **leyes empíricas** que se pueden aplicar al sistema).

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Para algunos objetivos quizá baste con conformarse con **modelos de baja resolución**, como por ejemplo **despreciar** la fuerza de fricción del aire para describir el movimiento de un cuerpo.



Ahora, si eres un científico cuyo trabajo es **predecir con exactitud** el movimiento de un cuerpo con exactitud para conocer la trayectoria de vuelo y alcance, habrá que considerar la resistencia del aire y otros factores

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

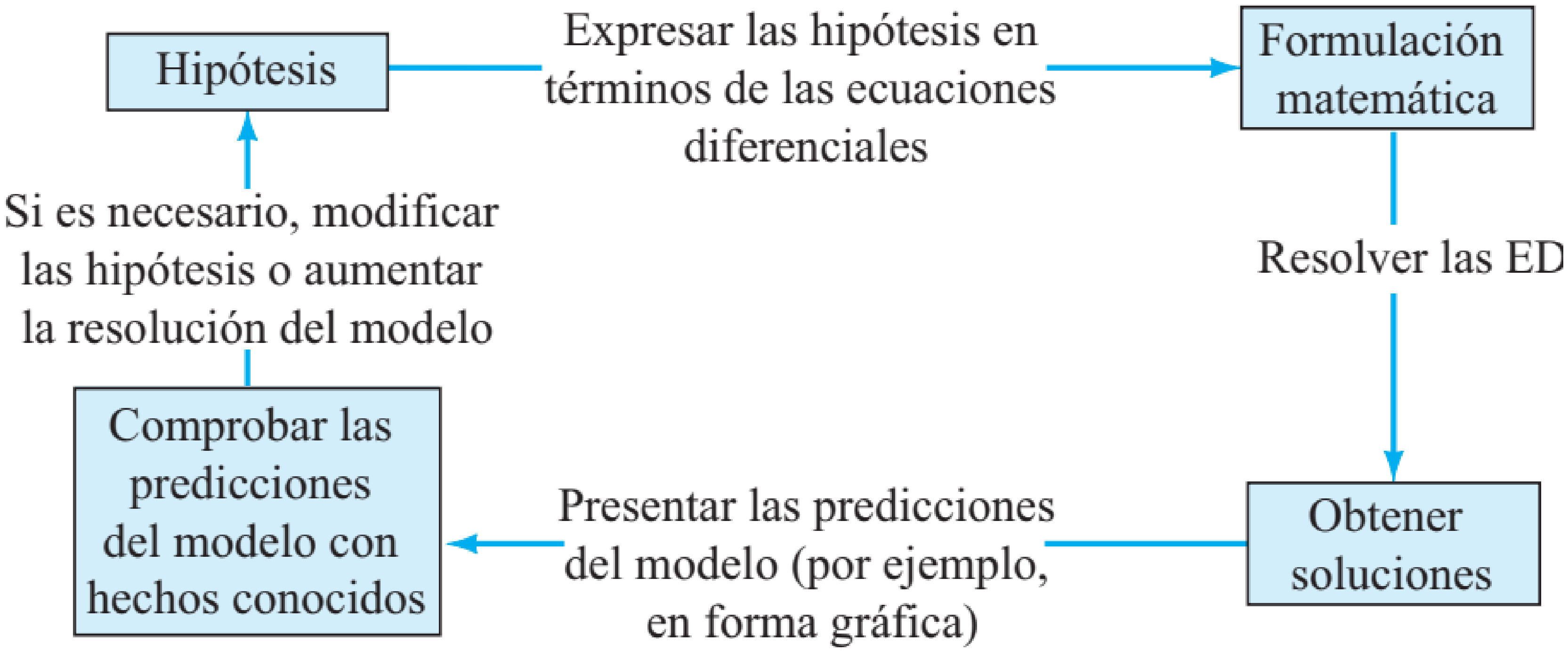
NOTA: Como las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia una ***razón de cambio*** de una o más variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis puede ser una o más ecuaciones que contengan derivadas.

Un modelo matemático puede ser **una ecuación diferencial** o **un sistema de ecuaciones diferenciales.**

- Una vez formulado el modelo, se busca resolverlo y si la solución es consistente con los datos experimentales, se puede ***aumentar el nivel de resolución*** del modelo o hacer ***hipótesis alternativas*** de los mecanismos del sistema.

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

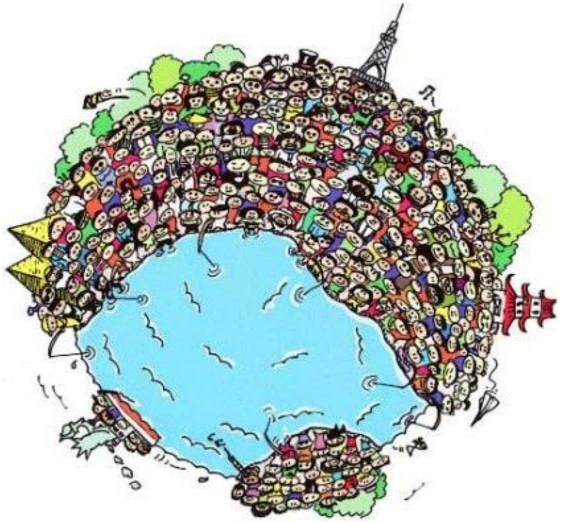


Una solución del modelo expresa el estado del sistema; es decir, los valores de las variables o variable dependiente para los valores adecuados del tiempo, pueden describir el sistema en el **pasado**, **presente** y **futuro**

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Dinámica poblacional: Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento de la población humana por medio de las matemáticas se realizó en 1798 por Thomas Malthus. Su modelo parte de la suposición de que la razón con la que la población de un país crece es un periodo de tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo.



$$\frac{dP}{dt} \,\alpha\, P \quad o \quad \frac{dP}{dt} = kP$$

k es una constante de proporcionalidad

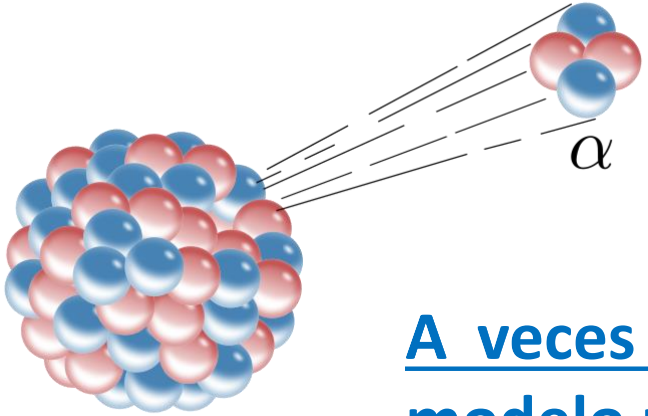
Este modelo simple, **falla** si se consideran otros factores que puedan influir en el **crecimiento** o **decrecimiento** de la población

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Decaimiento radiactivo: el núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables (los átomos se desintegran y se convierten en átomos de otras sustancias) Por ejemplo el radio Ra-226 se transforma en radón Rn-222.

El decaimiento radiactivo es proporcional al número de núcleos *A*



$$\frac{dA}{dt}\ \alpha\ A \quad o \quad \frac{dA}{dt} = kA$$

k es una constante de proporcionalidad

A veces una sola ecuación diferencial puede servir de modelo matemático de muchos fenómenos distintos

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton: de acuerdo con la ley empírica para el calentamiento o enfriamiento de Newton, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y del medio que le rodea (temperatura ambiente)

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad o \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

T Temperatura del cuerpo

T_m Temperatura del medio

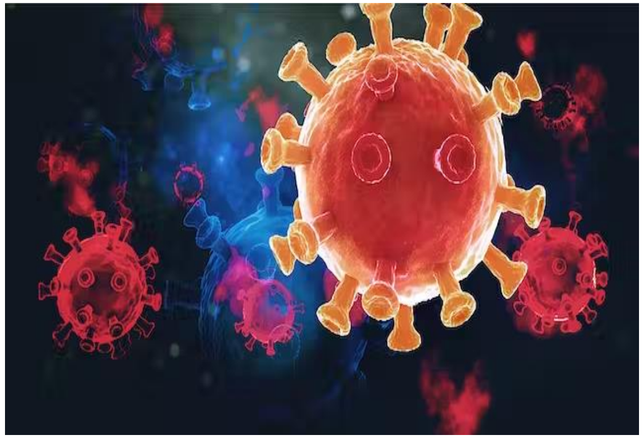
Para ambos casos calentamiento o enfriamiento si la temperatura del medio es constante se tiene que *k < 0*

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Propagación de una enfermedad: Una enfermedad contagiosa como un virus de gripe, se propaga por una comunidad de personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Entonces *x(t)* denotaría el número de personas; mientras que *y(t)* denotaría a las personas que aún no han sido expuestas.

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$



Supongamos que en una pequeña comunidad tiene una población fija de *n* personas. Si se introduce una persona infectada en la comunidad se tendría que $x + y = n + 1$

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Reacciones Químicas: Se dice que la desintegración de una sustancia radiactiva sigue una ley de primer orden; pero también muchas reacciones químicas siguen esa misma ley empírica

Entonces si $X(t)$ es la cantidad de sustancia A, se tiene que $dX/dt = kX$ Donde k es una constante negativa debido a que X es decreciente

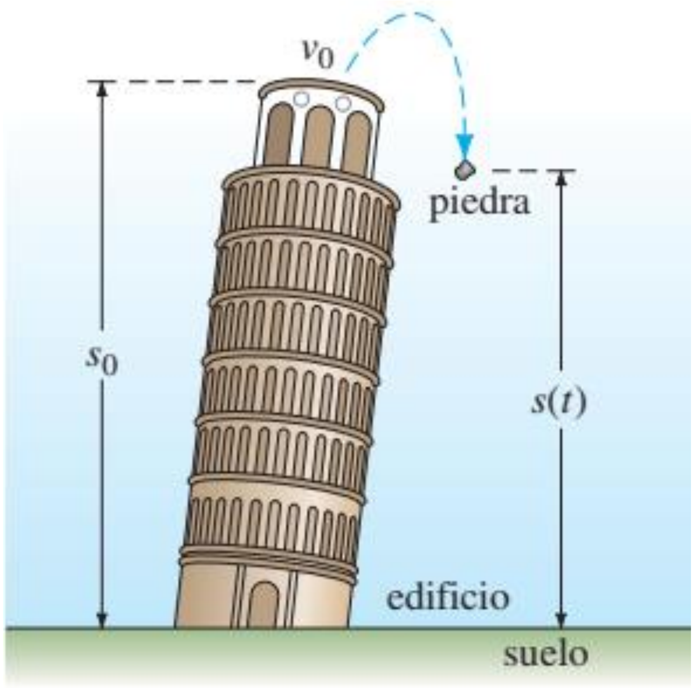
$$\boldsymbol{(CH_3)_3CCl} + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCL$$

En la reacción anterior la concentración del **cloruro de terbutilo** controla la rapidez de la reacción

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Cuerpos en Caída: Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se mueve se toman en consideración las **leyes de Newton.** Entonces supongamos que se arroja una pierda desde lo alto de un edificio ¿Cuál será su posición *s(t)* con respecto al suelo en el tiempo *t*.



$$F = \sum F_K \qquad F = ma$$

leyes de Newton

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, s\,(0) = s_o, s'(0) = v_0$$

La aceleración de la piedra es la segunda derivada de la posición, entonces si la altura del edificio es s_o y la velocidad inicial de la roca es v_o entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0}$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Comentarios

En los ejemplos anteriores se han descrito **sistemas dinámicos** que consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, que se llaman variables de estado, junto con una regla que permita determinar sin ambigüedades el estado del sistema en términos de un estado prescrito al tiempo t_0.

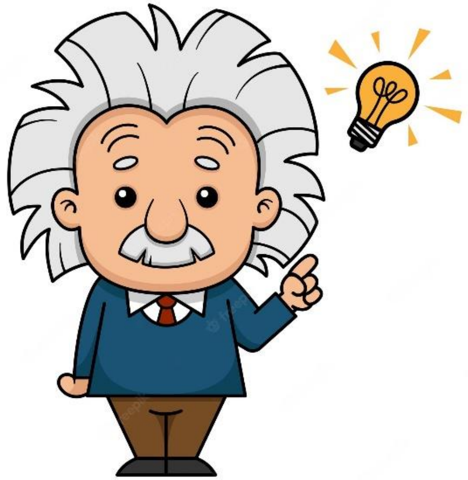
Por otro lado, el **estado del sistema** al tiempo t es el valor de las variables de estado en un instante: el estado de tiempo t_0 es simplemente las condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Comentarios

La solución (a la ecuación diferencial) a un problema con valores iniciales se llama **respuesta del sistema**.



Finalmente, **No todos los sistemas** que se estudian son dinámicos, existen **sistemas estáticos** en que el modelo matemático es una ecuación diferencial

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales

Resolviendo una ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x}{y}$$ Escribir la ecuación original

$$yy' = 2x$$ Multiplicar ambos miembros por y

$$\int y\,y'dx = \int 2xdx$$ Integrar respecto a x

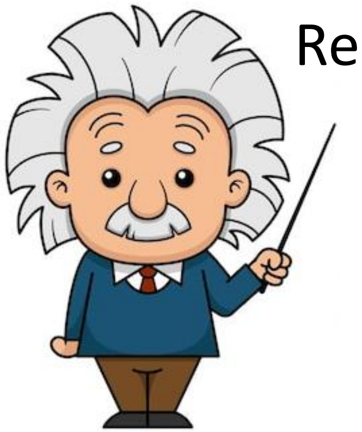
$$\int y\,dy = \int 2xdx$$ *dy = y'dx*

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C$$

Aplicar la regla de la potencia

$$y^2 - 2x^2 = C_1$$

Reescribir, sea $C = 2C_1$



Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales

Resolviendo una ecuación diferencial

En la práctica, más personas prefieren usar la **notación de Leibniz** y las diferenciales cuando se aplica la separación de variables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$ydy = 2xdx$$

$$\int y\,dy = \int 2xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C$$

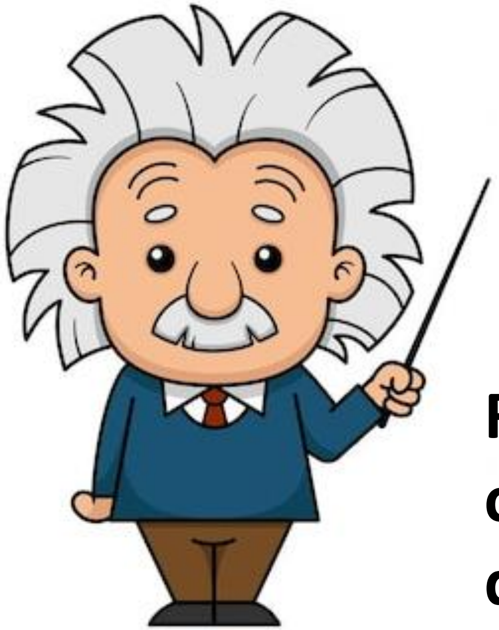
$$y^2 - 2x^2 = C_1$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales

Modelos de crecimiento y decrecimiento

En muchas aplicaciones, el ritmo o velocidad de cambio de una variable *y* es proporcional al valor de *y*. Si *y* es una función del tiempo *t*, la proporción se puede escribir como



$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Proporcional a *y*

Razón de cambio de *y*

La solución general de esta ecuación diferencial se proporciona en el siguiente **teorema**

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Teorema

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constant k, entonces:

$$y = Ce^{kt}$$

Donde C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad.** El crecimiento exponencial se produce cuando $k > 0$ y el decrecimiento cuando $k < 0$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales

Demostración

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int kdt$$

$$\ln y = kt + C$$

$$y = e^{kt}e^{C}$$

$$y = C_1 e^{kt}$$

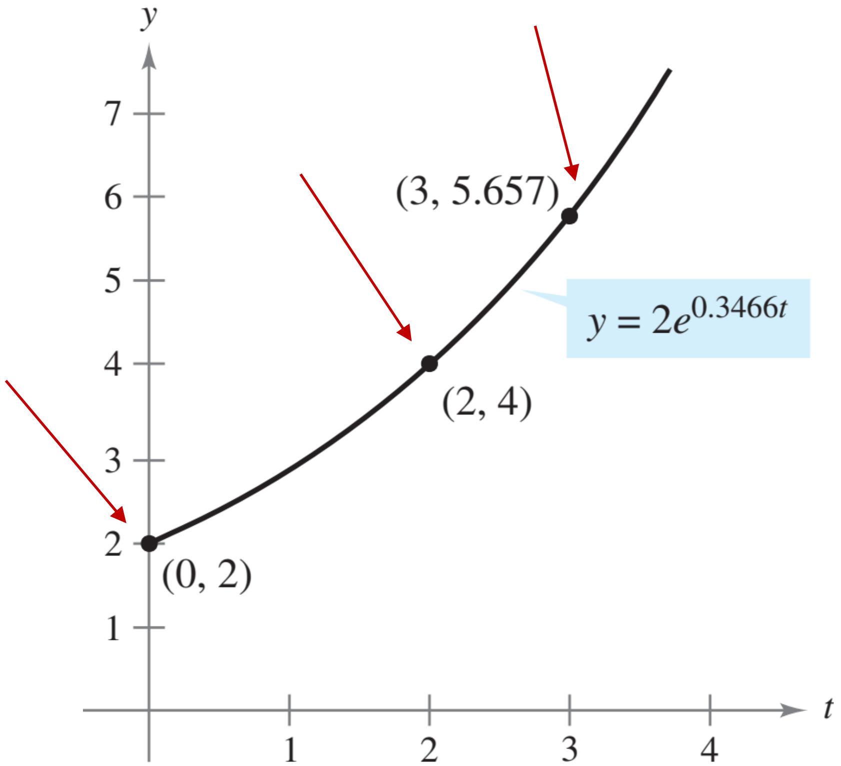
Así, **todas las soluciones** de $y' = ky$ son de la forma $y = Ce^{kt}$

Diferenciar $y = Ce^{kt}$ con respecto a t, y **verificar** que $y' = ky$

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo: La razón de cambio de *y* es proporcional a *y*. Cuando *t=0, y=2.* Cuando *t=2*, y=4 ¿Cuál es el valor de *y* cuando *t = 3*?



Solución: dado que $y' = ky$, se sabe que *y* y *t* se relacionan con la ecuación $y = Ce^{kt}$

$2 = Ce^0$ ⟹ $C = 2$ **Cuando *t = 0, y = 2***

$4 = 2e^{2k}$ ⟹ $k = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}3466$ **Cuando *t = 2, y = 4***

Finalmente se tiene que $y = 2e^{0{,}3466t}$. Cuando *t= 3* ***y= 5,657***

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo: Suponer que 10 gramos del isótopo ^{239}Pu se liberaron en el accidente nuclear de Chernobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir a 1 gramo?

Solución: considerando que y representa la masa en gramos del plutonio y la tasa de desintegración es proporcional a y se tiene que $y = Ce^{kt}$ t es el tiempo en años

$$10 = Ce^{k0} = Ce^{0} \Rightarrow C = 10$$

Cuando *t = 0, y = 10*

$t_{\frac{1}{2}}\ para\ el\ ^{239}Pu$ = 24100 años

$$5 = 10e^{k24100} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k24100}$$

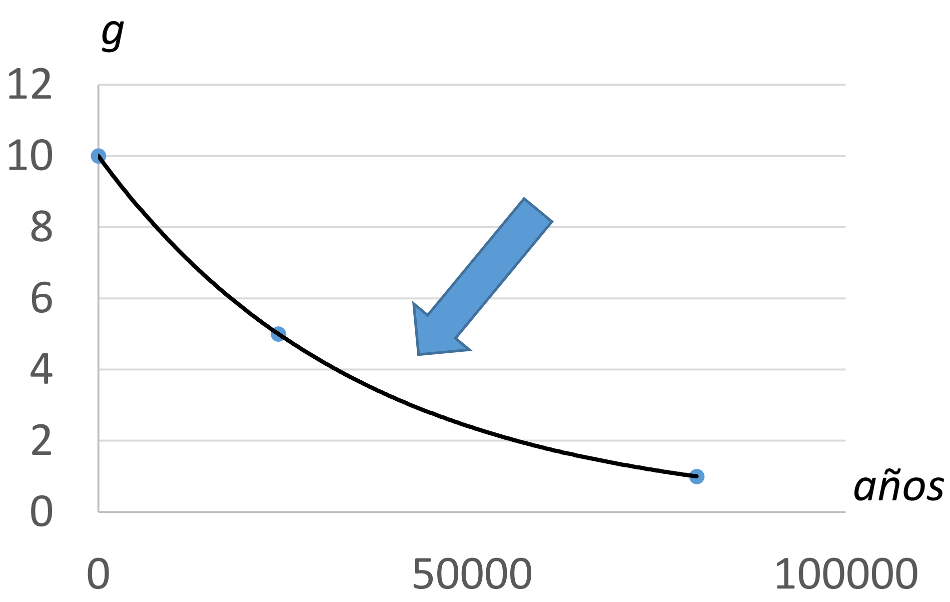
$$\frac{1}{24100}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \Rightarrow k = -0{,}000028761$$

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Solución: De esta forma el modelo es

$$y = 10e^{-0{,}000028761t} \qquad 1 = 10e^{-0{,}000028761t} \qquad t = 80059\ años$$



Nota: El modelo de decrecimiento exponencial de este ejemplo se puede escribir como $y = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{t/24100}$. Este sería un modelo más fácil de derivar, pero no es conveniente para algunas aplicaciones

Nota: El decrecimiento radiactivo se medie en términos de la ***vida media*** (tiempo requerido para reducir la muestra radiactiva a la mitad)

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo: Suponer que una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial. Había 100 moscas antes del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día. ¿Cuántas moscas habían en la población original?

Solución: De esta forma el modelo es $y = Ce^{kt}$ el número de moscas al momento *t* se mide en días y que *y* es continua donde el número de moscas es discreto. Dado a que *y = 100* para *t = 2; y = 300* para *t = 4.*

$$100 = Ce^{2k}$$

$$300 = Ce^{4k}$$

$$\Rightarrow \quad C = 100e^{-2k}$$

$$\Rightarrow \quad 300 = 100e^{-2k}e^{4k}$$

$$300 = 100e^{2k}$$

$$\ln 3 = 2k$$

$$\frac{1}{2}\ln 3 = 2k \qquad k \approx 0.5493$$

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Así, el modelo de crecimiento exponencial es:

$$y = Ce^{0.5493t}$$

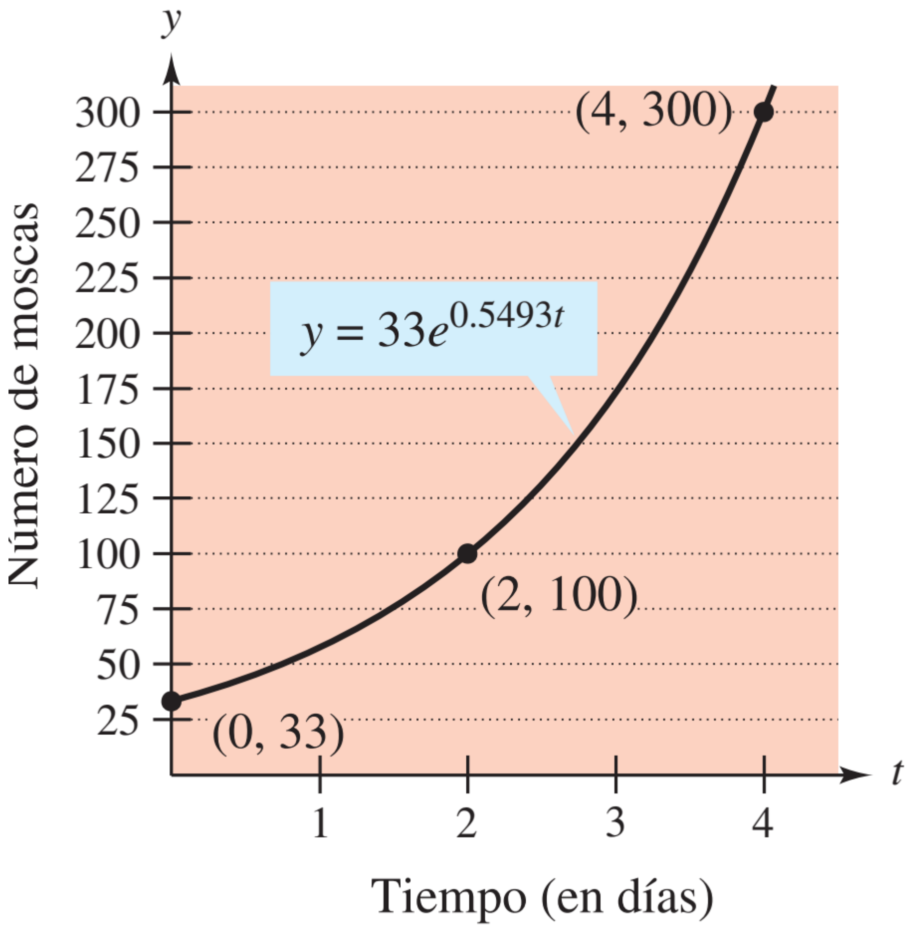
Para resolver C, replicamos la condición *y = 100* para *t = 2*

$$100 = Ce^{0.5493(2)}$$

$$C = 100e^{-1.0986} \approx 33$$

Entonces: $y = 33e^{0.5493t}$

Para *t = 0* $y = 33e^{0.5493(0)} = 33$



Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo: Sea *y* la temperatura (ºF) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60º. Si la temperatura del objeto baja de 100º a 90º en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80º?

Solución: Por la ley de enfriamiento de Newton se sabe que la razón de cambo en y es proporcional a la diferencia entre *y* y 60.

$$y' = k(y - 60)$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 60)$$

$$\frac{1}{y - 60}dy = kdt$$

$$\int \frac{1}{y - 60}dy = \int kdt$$

$$ln|y - 60| = kt + C_1$$

Dado a que *y > 60*

$$ln(y - 60) = kt + C_1$$

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Solución: Entonces

$$ln(y-60) = kt + C_1$$

$$\Rightarrow \quad y - 60 = e^{kt+C_1}$$

$$\Rightarrow \quad y = 60 + Ce^{kt} \qquad C = e^{C_1}$$

Para *y = 100* cuando *t = 0, se obtiene que*

$$100 = 60 + Ce^{k(0)}$$

$$C = 40$$

Para cuando *y = 90* cuando *t = 10*

$$\Rightarrow \quad 90 = 60 + 40e^{k(10)}$$

$$30 = 40e^{10k}$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0.02877$$

$$\Rightarrow \quad y = 60 + 40e^{-0.02877t}$$

Modelo de enfriamiento

Ecuación Diferencial

Modelos de crecimiento y decrecimiento

Solución: Finalmente, cuando *y = 80,* se obtiene que

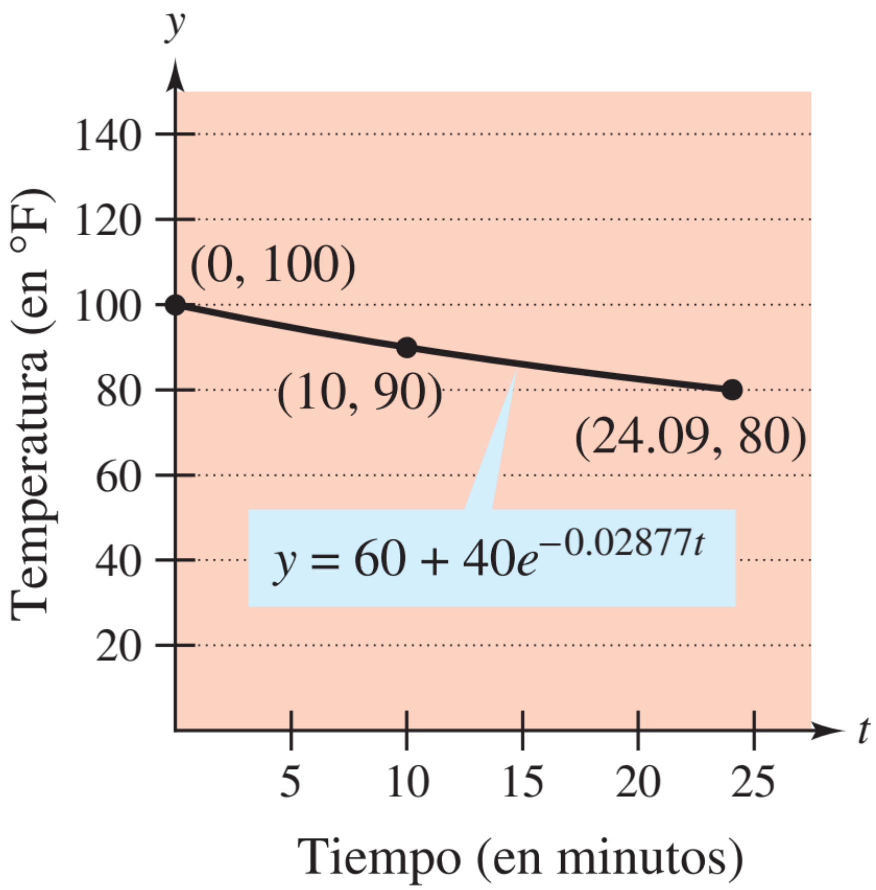
$$80 = 60 + 40e^{-0.02877t}$$

$$20 = 40e^{-0.02877t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0.02877t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.02877t$$

$$t = 24.09\ minutos$$



Ecuación Diferencial

Separación de variables

Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Donde M es una función continua sólo de x y N es una función continua sólo de y.

Tales ecuaciones se dicen que son **separables,** y el procedimiento de solución se denomina **separación de variables**

Ecuación diferencial original	*Reescrita con variables separables*
$x^2 + 3y\frac{dy}{dx} = 0$	$3y\,dy = -x^2 dx$
$y' sen(x) = \cos x$	$dy = \cot x \, dx$
$\frac{xy'}{e^y + 1} = 2$	$\frac{1}{e^y + 1} dy = \frac{2}{x} dx$

Ecuación Diferencial

Separación de variables

Ejemplo: dada la condición inicial *y(0) = 1;* encontrar la solución particular de la ecuación $xydx + e^{-x^2}(y^2 - 1)dy = 0$

Solución: Note que *y = 0*, es una solución de la ecuación diferencial pero no satisface la condición inicial. Entonces aplicando variables separables se tiene que

$$xydx + e^{-x^2}(y^2 - 1)dy = 0$$

$$e^{-x^2}(y^2 - 1)dy = -xydx$$

$$\left(y - \frac{1}{y}\right)dy = -xe^{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int \left(y - \frac{1}{y}\right)dy = -\int xe^{x^2}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - ln|y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

De las condiciones iniciales se tiene que

$$\frac{y^2}{2} - ln|y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + 1$$

$$y^2 - \ln y^2 = -e^{x^2} + 2$$

Ecuación Diferencial

Separación de variables

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la curva que pasa a través del punto (1,3) y tiene pendiente y/x^2 en cualquier punto *(x,y)*

Solución: Dado a que la pendiente está dada por y/x^2 se tiene que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x^2}$$

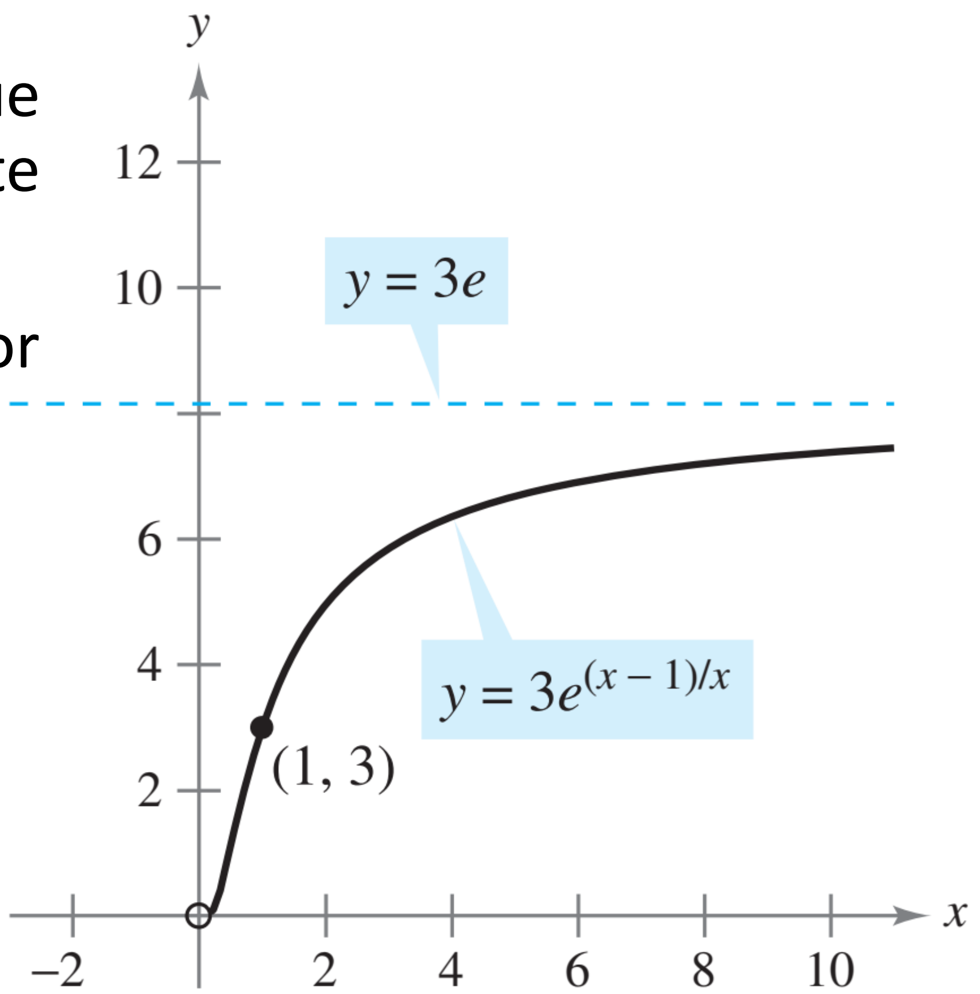
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$y = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)+C_1} = Ce^{-\left(\frac{1}{x}\right)}$$

De la condición iniciales se tiene que y(1) = 3

$$y = 3e^{\frac{x-1}{x}}, \qquad x > 0$$



Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables en *x* y *y* se pueden separar por un cambio de variables. Éste es el caso de las ecuaciones de la forma $y' = f(x,y)$**,** donde *f* es una **función homogénea**.

Se dice que la función dada por *f(x,y)* es ***homogénea de grado n*** si:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$ ***Función homogénea de grado n***

Donde *n* es un número real

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Dicho en otras palabras, Una **ecuación diferencial homogénea** es una ecuación de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Donde *M* y *N* son funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplos Verificar funciones homogéneas

a) $f(x,y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$

b) $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}} + ysen\left(\frac{y}{x}\right)$

c) $f(x,y) = x + y^2$

d) $f(x,y) = x/y$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Ejemplos Verificar funciones homogéneas

a) $f(x,y) = x^2y - 4x^3 + 3xy^2$ es una función homogénea de grado 3 dado que:

$$f(tx,ty) = (tx)^2(ty) - 4(tx)^3 + 3(tx)(ty)$$

$$= t^3(x^2y) - t^3(4x^3) + t^3(3xy^2)$$

$$= t^3(x^2y - 4x^3 + 3xy^2)$$

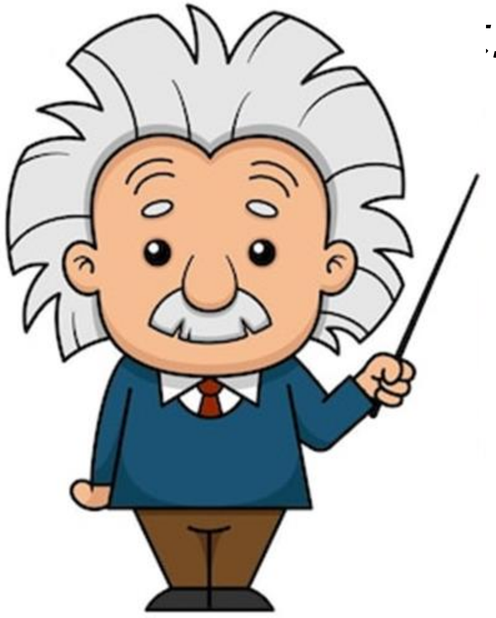
$$= t^3 f(x,y)$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Ejemplos Verificar funciones homogéneas

b) $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}} + ysen\left(\frac{y}{x}\right)$ es una función homogénea de grado 1 dado que:



$$x, ty) = txe^{tx/ty} + tysen\left(\frac{ty}{tx}\right)$$

$$= t\left(xe^{\frac{x}{y}} + ysen\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= tf(x,y)$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Ejemplos Verificar funciones homogéneas

c) $f(x,y) = x + y^2$ no es una función homogénea dado que

$$f(tx,ty) = tx + t^2y^2 = t(x + ty^2) \neq t^n(x + y^2)$$

d) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ es una función homogénea de grado 0 dado que

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{ty} = t^0\frac{x}{y}$$

Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Teorema: Cambio de variables para ecuaciones homogéneas
Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es **homogénea**, entonces se puede transformar en una ecuación diferencial cuyas **variables** son **separables** por la sustitución $$y = vx$$ Donde *v* es una función derivable de x

Ecuación Diferencial

Separación de variables

Ejemplo: Encontrar la solución general de $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$

Solución: dado a que $(x^2 - y^2)$ y $3xy$ son homogéneas de grado 2 usar

$y = vx$ para obtener $dy = xdv + vdx$

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 3x(vx)(xdv + vdx) = 0$$
$$(x^2 + 2v^2x^2)dx + 3x^3vdv = 0$$
$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^2(3vx)dv = 0$$

Al dividir entre x^2 y separar variables, se obtiene

$$(1 + 2v^2)dx = -3vxdv$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(-\frac{3v}{1 + 2v^2}\right)dv$$

Ecuación Diferencial

Separación de variables

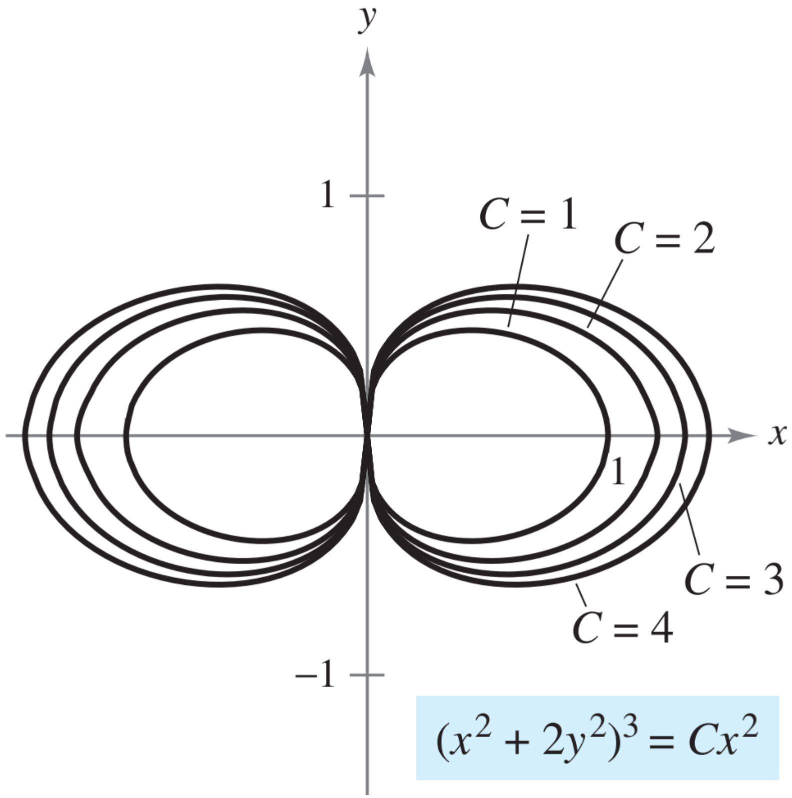
Ejemplo: Encontrar la solución general de $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$

$$\ln|x| = -\frac{3}{4}\ln(1+2v^2) + C_1$$

$$4\ln|x| = -3\ln(1+2v^2) + \ln|C|$$

$$\ln|x|^4 = ln|C(1+2v^2)^{-3}|$$

$$x^4 = C(1+2v^2)^{-3}$$



Al regresar el cambio se produce la solución general

$$x^4 = C\left(1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-3} \quad \left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^3 x^4 = C$$

$$(x^2 + 2y^2)^3 = Cx^2$$

Ecuación Diferencial

Separación de variables

Ejemplo: La razón de cambio del número de coyotes *N(t)* en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde *t* es el tiempo en años. Cuando *t = 0* , la población es 300 y cuando *t = 2,* la población se incrementó a 500. Encontrar la población cuando *t= 3*

Solución Dado a que el ritmo de cambio de la población está dado por:

$$\frac{dN}{dt} = k(650 - N)$$

$$\frac{dN}{650 - N} = kdt$$

$$\int \frac{dN}{650 - N} = \int kdt$$

$$-ln|650 - N| = kt + C_1$$

$$ln|650 - N| = -kt - C_1$$

$$650 - N = e^{-kt - C_1}$$

$$N = 650 - Ce^{-kt}$$

Ecuación Diferencial

Separación de variables

Solución Si se usa *N = 300 cuando t = 0*, se obtiene que *C = 350*, de esta forma

$$N = 650 - 350e^{-kt}$$

Para *N = 500 cuando t = 2 se tiene que:*

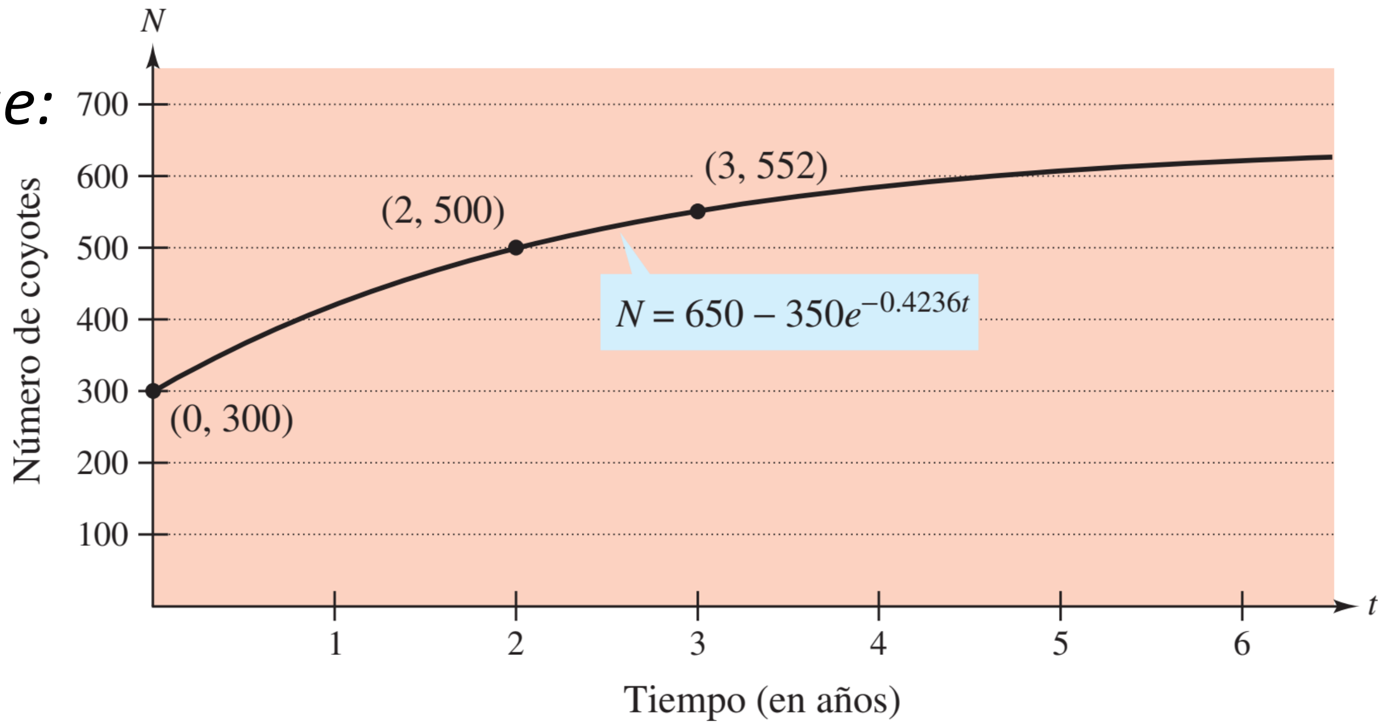
$$500 = 650 - 350e^{-k(2)}$$

$$e^{-2k} = \frac{3}{7} \quad k \approx 0.4236$$

El modelo del coyote es:

$$N = 650 - 350e^{-0.4236t}$$

Cuando *t = 3, N = 552 Coyotes*



Nota: *si bien este modelo es aproximado, hay otros modelos que son mejores para estimar la población como es el modelo* ***predador-presa***

Ecuación Diferencial

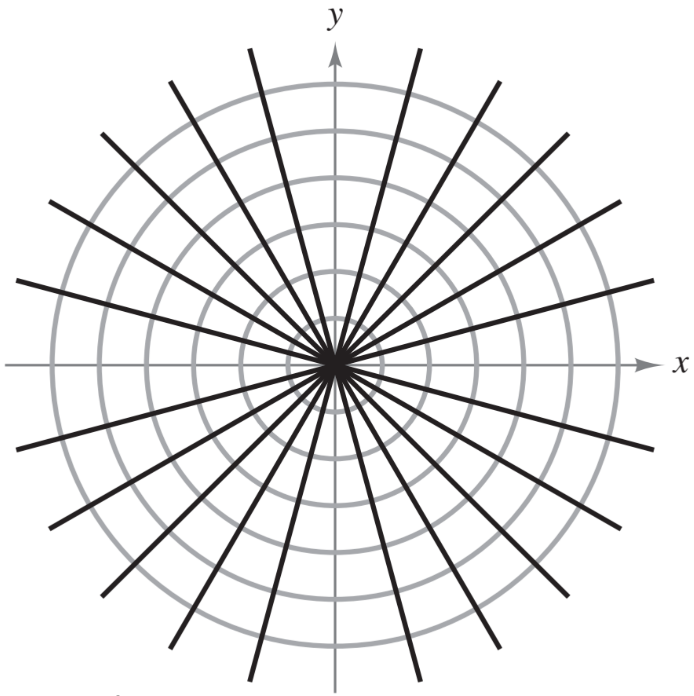
Ecuaciones diferenciales homogéneas

Para algunas aplicaciones en electrostática, termodinámica e hidrodinámica es necesario encontrar familias de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los demás miembros de una familia de curva dada:

$$x^2 + y^2 = C$$

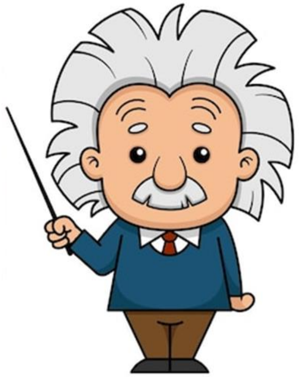
Cada una de las cuales intersecta a las rectas de la familia en ángulos rectos

$$y = Kx$$



Cada recta y = Kx es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias

Estas dos familias de curvas se dicen **mutuamente ortogonales** y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal**



Ecuación Diferencial

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Ejemplo: Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por $y = \frac{C}{x}$ para *C ≠ 0* trazar la gráfica para varios miembros de cada familia

Solución: Primero, resolver la ecuación dada para *C* y escribir *xy = C.* Entonces, por derivación implícita con respecto a *x*, se obtiene

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Dado a que *y'* representa la pendiente de la familia de curvas dadas en *(x,y),* se deduce que la familia ortogonal tiene la pendiente reciproca negativa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Ecuación Diferencial

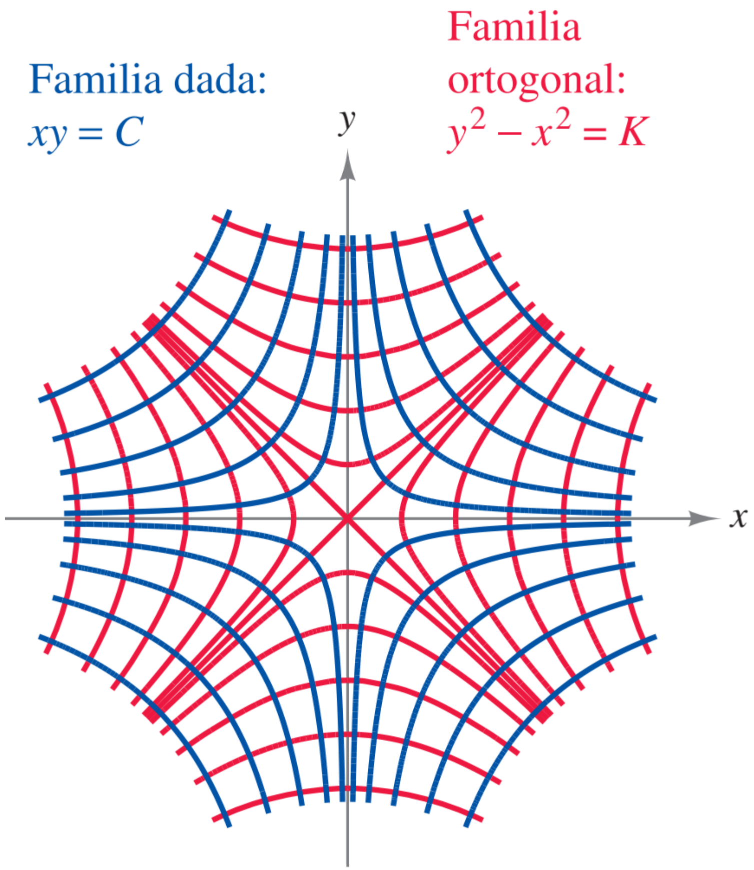
Ecuaciones diferenciales homogéneas

Solución: Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables integrando

$$\int y dy = \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 - x^2 = K$$



Los centros están en el origen y los ejes transversales son verticales para *K>0* y horizontales para *K < 0*

Ecuación Diferencial

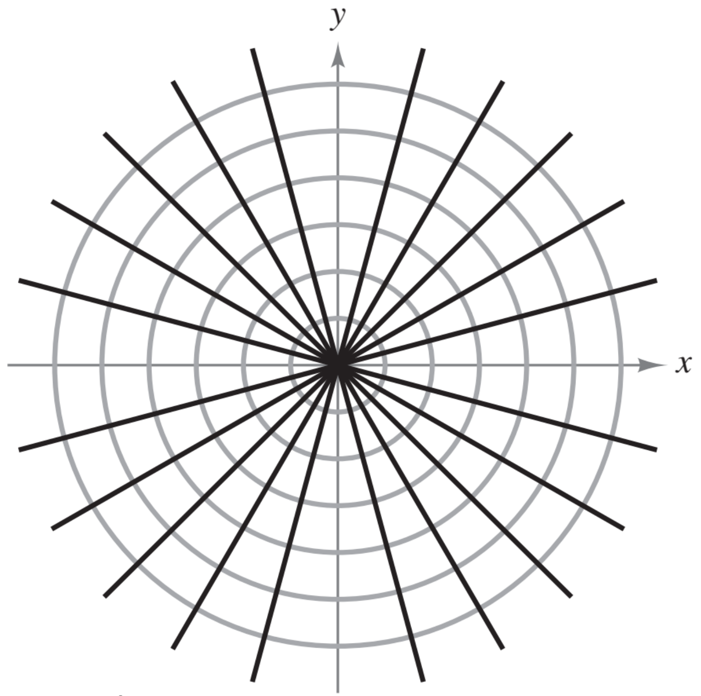
Ecuaciones diferenciales homogéneas

Para algunas aplicaciones en electrostática, termodinámica e hidrodinámica es necesario encontrar familias de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los demás miembros de una familia de curva dada:

$$x^2 + y^2 = C$$

Cada una de las cuales intersecta a las rectas de la familia en ángulos rectos

$$y = Kx$$



Cada recta y = Kx es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias

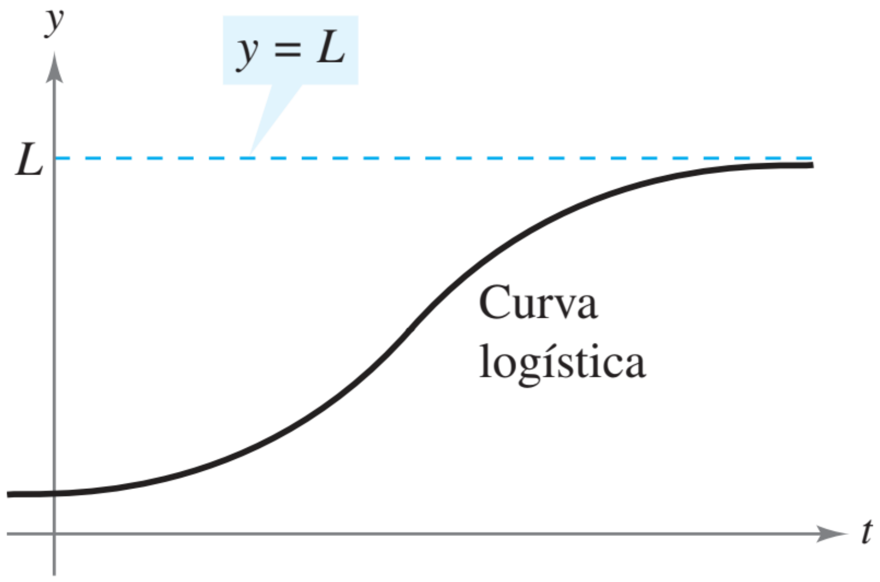
Estas dos familias de curvas se dicen **mutuamente ortogonales** y cada curva en una de las familias se denomina como una **trayectoria ortogonal**

Ecuación Diferencial

Ecuación diferencial logística

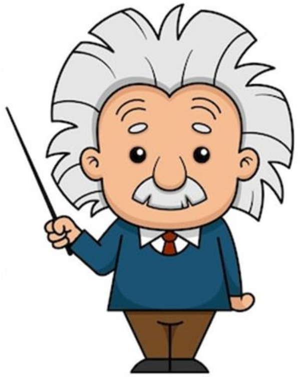
El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento.

El límite superior L se denomina **capacidad límite** o **de soporte** y es la máxima población $y(t)$ que se puede soportar conforme aumenta el tiempo t

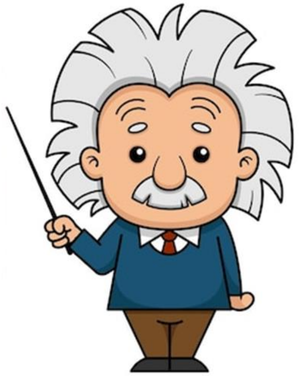


Notar que, como $t \to \infty$, $y \to L$

Un modelo que se usa con regularidad para este tipo de crecimiento es la **ecuación diferencial logística** $\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$



Ecuación Diferencial



Ecuación diferencial logística

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial logística $\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$

Solución: Empezar por separar variables

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

$$\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{L}\right)} dy = kdt$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y}\right) dy = \int kdt$$

$$ln|y| - ln|L - y| = kt + C$$

$$ln\left|\frac{L - y}{y}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\left|\frac{L - y}{y}\right| = be^{-kt}$$

$$y = \left(\frac{L}{1 + be^{-kt}}\right)$$

Nota: **Todas** las ecuaciones logística presentan la forma de esta **solución**

Ecuación Diferencial

Ecuación diferencial logística

Ejemplo: Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4000 alces. La tasa de crecimiento de la población es p $\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4000}\right), \quad 40 \leq p \leq 4000$ donde t es el número de años.

a) Escribir el modelo para la población de alces en términos de t.

b) Representar el campo de pendientes de la ecuación diferencial y la solución que pasa por el punto (0,40)

c) Usar el modelo para estimar la población de alces, después de 15 años

d) Encontrar el límite del modelo cuando $t \to \infty$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferencial logística

Solución: **a)** Se sabe que *L = 4000* entonces se tiene que:

$$p = \left(\frac{4000}{1 + be^{-kt}}\right)$$

Dado a que *p(0) = 40,* se puede observar que:

$$40 = \left(\frac{4000}{1 + be^{-k(0)}}\right) \Rightarrow 40 = \left(\frac{4000}{1 + b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad b = 99$$

Luego cuando *t = 5* y *p =104,* se puede resolver que *k es:*

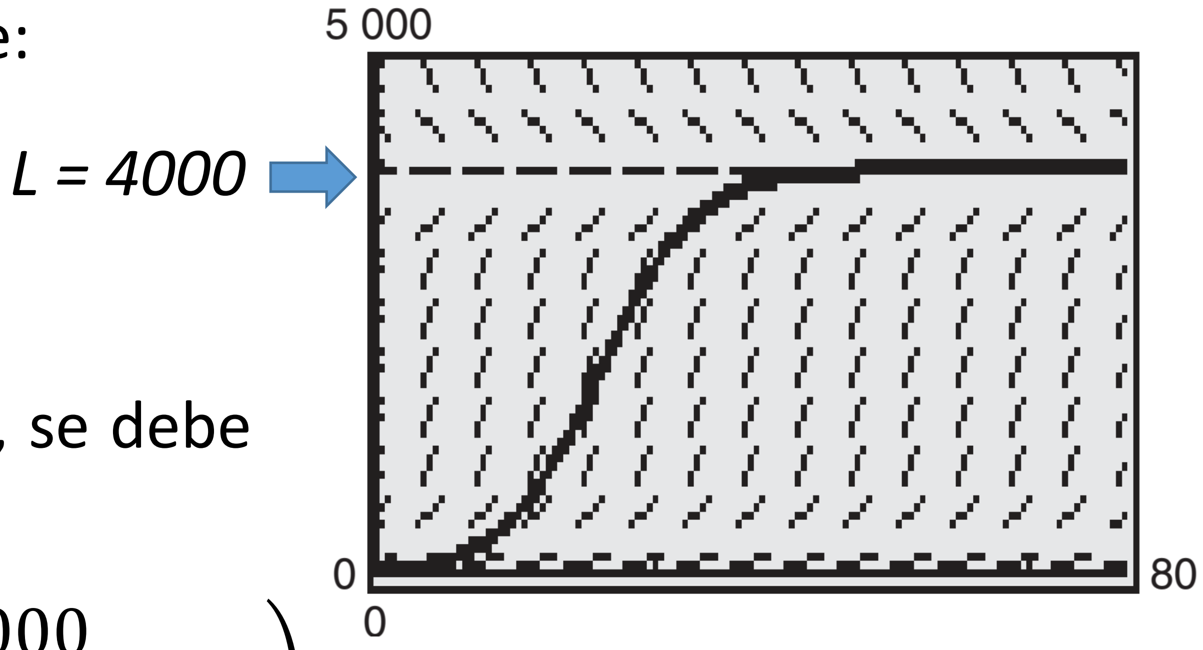
$$104 = \left(\frac{4000}{1 + 99e^{-k(5)}}\right) \Rightarrow k = 0.194 \qquad \Rightarrow p = \left(\frac{4000}{1 + 99e^{-0.194t}}\right)$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferencial logística

Solución: b) si se usa una herramienta gráfica se tendría que, se puede representar el campo de pendientes de:

$$\frac{dp}{dt} = 0.194p\left(1 - \frac{p}{4000}\right)$$



c) Para estimar la población en 15 años, se debe sustituir el tiempo por 15

$$p = \left(\frac{4000}{1 + 99e^{-0.194t}}\right) \Rightarrow p = \left(\frac{4000}{1 + 99e^{-0.194(15)}}\right) \Rightarrow p = 626$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferencial logística

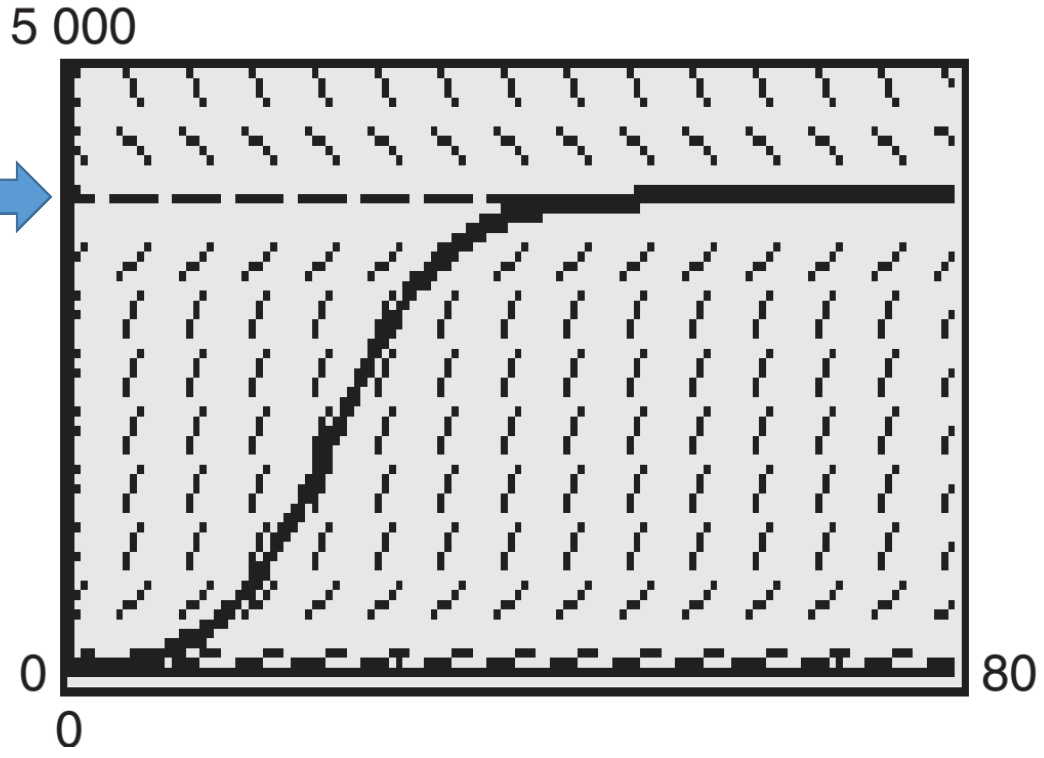
Solución: **d)**: Como *t* se incrementa sin saltos en el denominador

$$p = \left(\frac{4000}{1 + 99e^{-0.194t}}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{4000}{1 + 99e^{-0.194(t)}}\right) = \left(\frac{4000}{1 + \cancel{99e^{-0.194(t)}}}\right)$$

$$\left(\frac{4000}{1}\right) = 4000$$

L = 4000



Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Las **ecuaciones diferenciales lineales** son una familia especialmente "amigable" de ecuaciones diferenciales en las que, dada una ecuación lineal, (sea de primer orden o de un miembro de orden superior) **siempre existe** una buena posibilidad de encontrar **algún tipo de solución.**

Definición de ecuación diferencial lineal de primer orden
Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma: $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ Donde P y Q son funciones continuas de x. Se dice que esta ecuación diferencial lineal de la **forma normal**

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

El método para resolver una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ depende del hecho notable de que el ***lado izquierdo*** de la ecuación se pueda reformular en forma de la derivada exacta de un producto multiplicando los dos miembros de la ecuación por una función especial $\mu(x)$.

Es relativamente fácil encontrar una función $\mu(x)$ porque queremos:

$$\frac{d}{dx}\underbrace{[\mu(x)y]}_{\text{Producto}} = \underbrace{\mu\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y}_{\text{Regla del producto}} = \underbrace{\mu\frac{dy}{dx} + \mu P y}_{\text{El miembro izquierdo de la ED se multiplica por } \mu(x).}$$

Deben ser iguales

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu\frac{dy}{dx} + \mu P y$$

La igualdad es verdadera siempre que:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P dx \Rightarrow ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + C_1 \Rightarrow \mu(x) = C_2 e^{\int P(x)dx}$$

Podemos simplificarnos la vida haciendo $C_2 = 1$, porque todos los múltiplos constantes $C_2 = 2, C_2 = 3 \ldots, C_2 = n$ producen el mismo resultado:

$$\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Se llama **factor integrante** para la **ecuación**

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)}$$

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Multiplicando ambos lados por el factor integrante

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) + C \quad \Rightarrow$$

Integrando ambos lados de la ecuación

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Entonces: $$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) + C$$

Resolviendo para *y* se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x) + Ce^{-\int P(x)dx}$$

NOTA: Se debe hacer énfasis en que **no debe memorizar** la formula anterior sino seguir el procedimiento cada vez

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)dx$$ **Solución general**

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

En resumen

i) Recuerde llevar la **ecuación diferencial** a la **forma normal**

ii) Identifique de la identidad de la forma estándar *P(x)* y después determine el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$. No se necesita utilizar una constante para evaluar la integral indefinida $\int P(x)dx$

iii) Multiplique la forma normal de la ecuación diferencial por el factor integrante. El lado izquierdo de la **ecuación resultante** es automáticamente la derivada del factor integrante y *y:*

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

iv. Integra ambos lados de esta última ecuación y resuelva para *y.*

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Encontrar la solución general para $y' + y = e^{x}$

Solución Para este ecuación se tiene que $P(x) = 1$ y $Q(x) = e^{x}$ entonces el factor integrante sería:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad \mu(x) = e^{\int dx} \qquad \mu(x) = e^{x}$$

Lo que implica que la solución general sea:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx$$

$$y = \frac{1}{e^{x}} \int e^{x}(e^{x})dx$$

$$y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + Ce^{-x}$$

Solución general

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Teorema: Solución de una Ecuación Diferencial lineal de Primer orden

Un factor integrante para la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Es $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. La solución de la ecuación diferencial es:

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) + C$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Encontrar la solución general para $xy' - 2y = x^2$

Solución La forma normal de la ecuación dada es:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad y' - \left(\frac{2}{x}\right)y = x \qquad P(x) = -\frac{2}{x}$$

Forma normal

Entonces

$$\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx$$

$$-\int \frac{2}{x}dx = -\ln x^2$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-lnx^2} = \frac{1}{e^{\ln x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

Factor integrante

Entonces al multiplicar cada miembro por el factor integrante

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Encontrar la solución general para $xy' - 2y = x^2$

Solución La forma normal de la ecuación dada es:

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$$

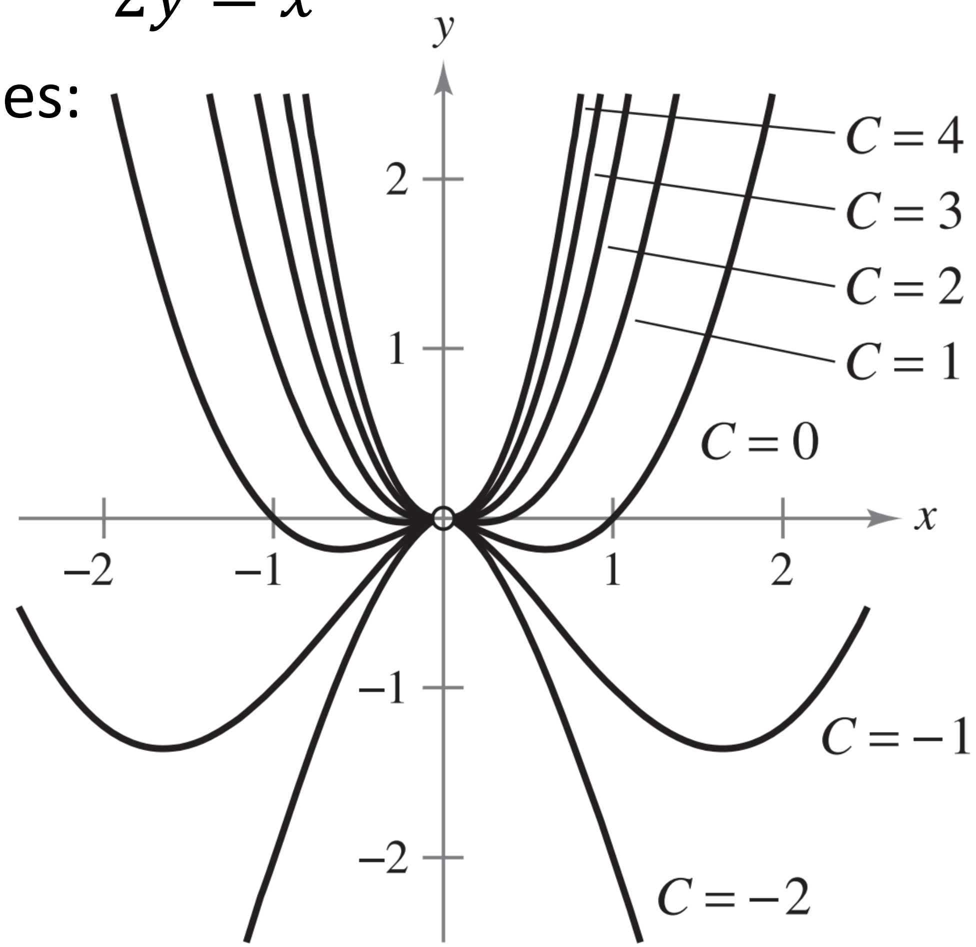
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \ln|x| + C$$

$$y = x^2(\ln|x| + C)$$

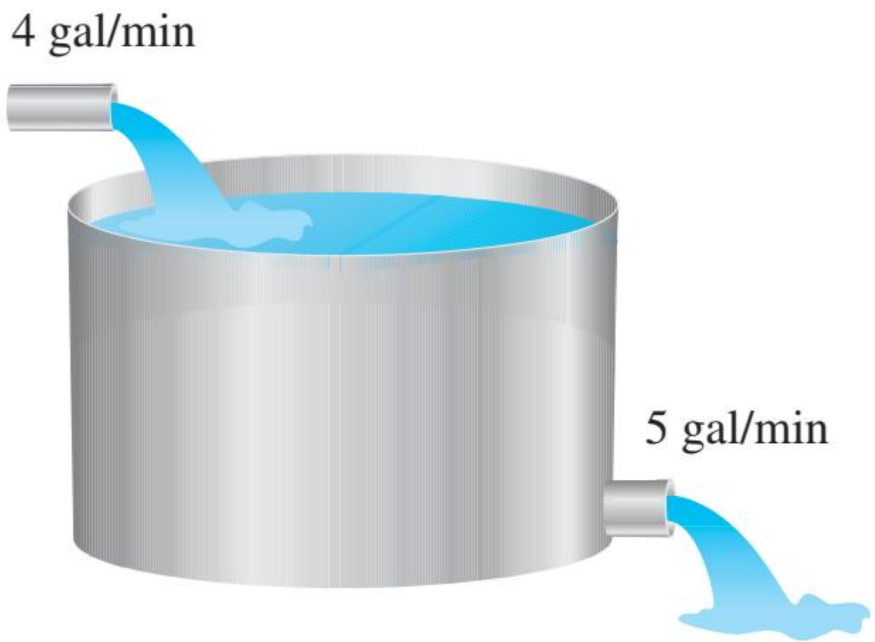
Varias curvas solución variando C



Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Un tanque que contiene 50 galones de una disolución compuesta por 90% de agua y 10% de alcohol. Una segunda disolución que contiene un 50% de agua y 50 % alcohol se agrega al tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Conforme se añade la segunda, el tanque empieza a drenar a una tasa de 5 galones por minuto. Si se supone que la disolución en el tanque se agita constantemente ¿cuánto alcohol permanecerá en el tanque después de 10 minutos?



Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Solución: Sea *y* el número de galones de alcohol en el tanque en cualquier instante *t*. Se sabe que cuando *t = 0 y* = 5. Dado a que el número de galones en el tanque en cualquier momento es *50 – t,* y que el tanque pierde 5 galones por minuto, se debe perder $[5/(50-t)]y$ galones de alcohol por minuto. Por otro lado, el tanque gana 2 galones de alcohol por minuto entonces la velocidad de cambio de alcohol está dada por:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50-t}\right)y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50-t}\right)y = 2$$

$$P(t) = 5/(50-t)$$

$$\int P(t)\,dt = \int \left(\frac{5}{50-t}\right)dt$$

$$\int \left(\frac{5}{50-t}\right)dt = -5\ln|50-t|$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Solución:

$$t < 50 \quad e^{\int P(t)dt} = e^{-5\ln(50-5)} = \frac{1}{(50-t)^5}$$

La solución general es

$$\frac{y}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5}dt = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5$$

Para *y = 5* y *t=0*

$$5 = \frac{50-0}{2} + C(50-0)^5$$

$$C = -\frac{20}{50^5}$$

Solución particular

$$y = \frac{50-t}{2} + 20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

Finalmente evaluando *t = 10*

$$y \approx 13.45\ gal$$

Lo que representa un 33.6% de alcohol en la solución

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Hay una ecuación no lineal que se reduce a una lineal con una apropiada sustitución y es conocida como la **ecuación de Bernoulli**, llamada así por James Bernoulli.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Esta ecuación es **lineal si *n = 0*,** y tiene **variables separables si *n* = 1**. Entonces en el siguiente desarrollo $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al multiplicar por y^{-n} y por $(1-n)$ se obtiene que:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(y^{1-n}) + +(1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

$$\frac{d}{dx}(y^{1-n}) + +(1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

Ahora haremos $z = y^{1-n}$ lo que produce la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + +(1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Entonces la solución general de la **ecuación de Bernoulli** será

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)P(x)dx)} = \int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx)}dx + C$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Encontrar la solución de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$

Solución: Para esta ecuación de Bernoulli, sea *n = -3,* usar la sustitución

$$z = y^4$$

$$z' = 4y^3y'$$

$$y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$$

Multiplicando por $4y^3$

$$4y^3y' + 4xy^4 = 4xe^{-x^2}$$

$$z' + 4xz = 4xe^{-x^2}$$

$$P(x) = 4x$$

$$\int P(x)dx = \int 4xdx = 2x^2$$

Siendo el factor integrante e^{2x^2}

$$z'e^{2x^2} + 4xze^{2x^2} = 4xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[ze^{2x^2}\right] = 4xe^{x^2}$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Ejemplo: Encontrar la solución de $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$

Solución: Para esta ecuación de Bernoulli, sea *n = -3,* usar la sustitución

$$\frac{d}{dx}\left[ze^{2x^2}\right] = 4xe^{x^2}$$

$$ze^{2x^2} = \int 4xe^{x^2}dx$$

$$ze^{2x^2} = 2e^{x^2} + C$$

$$z = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}$$

Regresar el cambio $z = y^4$ de esta forma la **solución general** es

$$\boldsymbol{y^4 = 2e^{-x^2} + Ce^{-2x^2}}$$

Ecuación Diferencial

Ecuación diferenciales lineales de primer orden

Resumen de ecuaciones diferenciales de primer orden

Método	***Forma de la ecuación***
1. Variables separables	$M(x)dx + N(y)dy = 0$
2. Homogéneas	$M(x)dx + N(y)dy = 0$, donde *M* y *N* son homogéneas de *n-ésino* grado
3. Lineal	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Ecuación de Bernoulli	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

Ecuación Diferencial

Curiosidad

Nota: Las ***ecuaciones de Lotka-Volterra***, conocidas también con el nombre de ***ecuaciones predador-presa.*** Son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usan para **describir dinámicas** de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y la otra como el depredador.

Fueron propuestas de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926 y las ecuaciones tienen la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - dx)$$

y es el número de algún depredador, x es el número de sus presas dy/dt y dx/dt representan la variación de la población en el tiempo

Ecuación Diferencial

Curiosidad

Nota: Las ***ecuaciones de Lotka-Volterra***, conocidas también con el nombre de ***ecuaciones predador-presa.*** Son un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que se usan para **describir dinámicas** de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y la otra como el depredador.

Fueron propuestas de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926 y las ecuaciones tienen la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - dx)$$

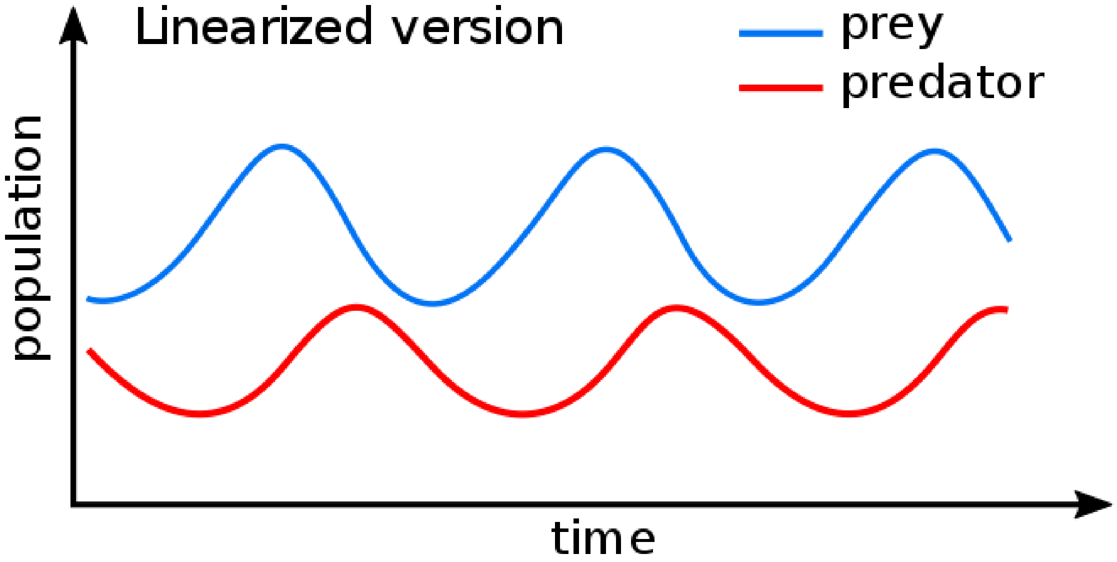
a, b, c y d son parámetros (positivos) que representan las interacciones de las dos especies.

Ecuación Diferencial

Curiosidad

Las ecuaciones tienen **soluciones periódicas**. Estas soluciones no tienen una expresión simple en términos de las funciones trigonométricas habituales, aunque son bastante manejables

Una **linealización** de estas ecuaciones produce una **solución muy similar al movimiento armónico simple** con la población de depredadores detrás de la presa en 90° en el ciclo



Ecuación Diferencial

Curiosidad

El modelo **depredador-presa** de *Lotka-Volterra* hace una serie de **suposiciones** sobre el **medio ambiente** y la **biología de las poblaciones** de depredadores y presas:

1. La población de presas encuentra abundante comida en todo momento.
2. El suministro de alimentos de la población de depredadores depende completamente del tamaño de la población de presas.
3. La tasa de cambio de la población es proporcional a su tamaño.

Ecuación Diferencial

Curiosidad

El modelo **depredador-presa** de *Lotka-Volterra* hace una serie de **suposiciones** sobre el **medio ambiente** y la **biología de las poblaciones** de depredadores y presas:

4. Durante el proceso, el entorno no cambia a favor de una especie y la adaptación genética es intrascendente.

5. Los depredadores tienen un apetito ilimitado.

6. Ambas poblaciones pueden ser descritas por una sola variable. Esto equivale a suponer que las poblaciones no tienen una distribución espacial o de edad que contribuya a la dinámica.

Bibliografía

1. Cálculo. Ron Larson y Bruce H. Edwars. 9na Edición. Editorial McGraw-Hiil
2. Mathematics for Physical Chemistry. Robert G. Mortimer. 3rd edition. Elsevier
3. Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera. Dennis G. Zill y Warren S. Wright. 8va Edición Editorial CENGAGE Learning
4. Cáculo Trascendentes tempreanas. Dennis G. Zill y Warren S. Wright. 4ta Edición. Editorial McGraw-Hill.
5. Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. 4ta Edición. Editorial MIR